UMBERTO BOTTAZZINI

L'Italia dall'Unità alla Prima guerra mondiale

Il periodo di circa sessant'anni che va dall'Unità alla fine della Prima guerra mondiale rappresenta una stagione unica per la matematica italiana. Il Risorgimento che culmina nell'unità politica del paese si accompagna infatti a una rinascita scientifica che, nel giro di pochi decenni, porta l'Italia su posizioni di avanguardia a livello internazionale in molti campi della matematica. Il caso della geometria algebrica, dove la «scuola italiana» si afferma con proprie caratteristiche peculiari, è forse il piú noto. Ma anche nei campi dell'analisi, della fisica matematica, della logica, l'opera dei matematici italiani è internazionalmente riconosciuta e apprezzata.

Se verso la metà del secolo la matematica nel nostro paese risente ancora di condizioni di sostanziale arretratezza, negli anni a cavallo del nuovo secolo l'Italia si affianca alla Francia e alla Germania tra le nazioni alla guida dello sviluppo matematico, e nelle principali sedi universitarie si sviluppano vere e proprie «scuole» di matematici, in grado di competere alla pari con i piú autorevoli centri stranieri.

Quali sono state le circostanze che hanno favorito quello sviluppo cosí imponente e impetuoso? Se si guarda alle condizioni del nostro paese, con limitate risorse naturali e cronicamente travagliato da difficoltà economiche, sembra naturale rispondere che, rispetto ad altre scienze, come la fisica o la chimica, la matematica presentava il vantaggio di non richiedere laboratori e attrezzature costose. Non c'è dubbio che questo aspetto abbia giocato un ruolo importante. Ma nelle precarie condizioni economiche dello Stato unitario si trova solo una parte della risposta.

Lo sviluppo scientifico del paese era considerato dalle classi dirigenti uscite dal Risorgimento una via per portare l'Italia al rango degli altri paesi europei, e lo sviluppo della matematica era a ragione considerato una condizione preliminare alla formazione di un «movimento scientifico nazionale», oltre che un ingrediente essenziale della formazione dei tecnici e ingegneri necessari per il decollo industriale. Di queste esigenze gli esponenti piú autorevoli della comunità matematica seppero farsi interpreti, con un forte impegno sul terreno politico e istituzionale. La loro partecipazione alle battaglie risorgimentali si tradusse in un'intensa attività politica nel nuovo Stato unitario. Membri del Parlamento, presenti in diverse commissioni, i matematici si rivelarono consiglieri preziosi e competenti nelle piú varie istanze della vita civile, capaci di dare un senso concreto alla loro attività di ricerca.

1. *Il «movimento scientifico» nazionale.*

Il 20 settembre 1858 tre giovani matematici italiani partivano da Novara alla volta della Germania. L'intento di Enrico Betti (1826-1892) e Francesco Brioschi (1824-1897), accompagnati nel viaggio dal giovane assistente di quest'ultimo, Felice Casorati (1835-1890), era di entrare in contatto con i matematici delle università di Gottinga e Berlino, allora all'avanguardia in Europa. A Gottinga fecero la conoscenza di Peter G. Lejeune-Dirichlet e di Bernhard Riemann. A Berlino, di Leopold Kronecker, Ernst E. Kummer e Karl Weierstrass, destinati a diventare nel giro di pochi anni il «triumvirato» alla guida della matematica tedesca. Sulla via del ritorno essi passarono per Parigi. In quella che, un tempo non lontano, era stata la capitale della matematica, e ora attraversava un periodo di momentaneo declino, strinsero rapporti di amicizia con Joseph Bertrand e Charles Hermite.

Quel viaggio segna, in maniera simbolica, la fine di un'epoca e l'affacciarsi della matematica italiana sulla scena europea. Qual era la situazione nel nostro paese verso la metà del secolo? Andando dal Regno del Piemonte a quello delle Due Sicilie, il panorama della matematica è largamente disomogeneo, e riflette la realtà politica variegata e frammentaria, disegnata per il nostro paese dal Congresso di Vienna.

Nella capitale sabauda la figura dominante è ancora Giovanni Plana (1781-1864), direttore dell'Osservatorio astronomico e presidente dell'Accademia delle Scienze. Antico allievo di Lagrange all'École Polytechnique, Plana aveva acquisito grande fama per le sue ricerche sulla teoria della Luna, premiate nel 1832 con la medaglia Copley della Royal Society. Ma negli anni Cinquanta si affaccia sulla scena torinese Angelo Genocchi (1817-1889), un giovane avvocato piacentino, un autodidatta appassionato di matematiche, che coltiva soprattutto la teoria dei numeri e dal 1857 insegna algebra e geometria complementare all'università.

Assai piú ricco è il quadro offerto dal principale centro matematico del Lombardo-Veneto, l'Università di Pavia. Alla scuola di Antonio Bordoni (1788-1860) sono cresciuti Gaspare Mainardi (1800-1879), che dal 1840 gli è succeduto nell'insegnamento del «calcolo sublime», e molti dei matematici della generazione risorgimentale, dagli stessi Brioschi e Casorati a Delfino Codazzi (1824-1875), Luigi Cremona (1830-1903) e Eugenio Beltrami (1835-1900).

Amico e compagno di studi di Bordoni a Pavia era stato Ottaviano Fabrizio Mossotti (1791-1863), astronomo e fisico-matematico che, dopo quasi un ventennio trascorso in esilio prima a Londra e poi in Argentina, nel 1843 viene chiamato dal granduca di Toscana per dare slancio alla Scuola Normale Superiore allora nuovamente istituita a Pisa, dopo l'iniziale, breve parentesi napoleonica. Nelle università dello Stato della Chiesa le figure di maggior rilievo sono Barnaba Tortolini (1808-1874), che dal 1850 «compila» a Roma gli «Annali di scienze matematiche e fisiche», e lo scolopio Domenico Chelini (1802-1878), che insegna a Roma per un ventennio, prima di passare nel 1851 all'Università di Bologna, e nei suoi lavori sulla teoria delle superfici dimostra di essere al corrente dei piú recenti risultati di Gauss e Liouville.

Nella capitale del Regno borbonico gli studi matematici sono indirizzati soprattutto verso la geometria classica. Nella «scuola» sintetica di Vincenzo Flauti (1782-1863) a Napoli si fanno i conti con i commentatori di Euclide, si coltiva la geometria pura e si guarda con indifferenza, se non con ostilità, ai piú recenti sviluppi analitici. Nella situazione di arretratezza culturale ancora piú drammatica della Sicilia la sola figura degna di nota è Placido Tardy (1816-1914), matematico di modesta levatura che aveva studiato a Parigi e insegna a Messina dal 1841 al 1847, prima di lasciare la propria città per motivi politici e stabilirsi a Genova.

Negli anni precedenti l'Unità non erano certo mancati i contatti con matematici stranieri. Cauchy, per esempio, nel periodo di autoesilio all'inizio degli anni Trenta aveva soggiornato nel nostro paese, e aveva insegnato la sua «nuova» analisi da una cattedra di «fisica sublime» che Carlo Alberto aveva creato per lui. Jacobi e Steiner avevano trascorso a Roma quasi un anno dal settembre 1843 all'estate 1844, e pubblicato articoli nel «Giornale arcadico». Anche Sylvester era stato spesso in visita in Italia. Tuttavia, nei matematici della generazione risorgimentale appare chiara la consapevolezza della necessità di confrontarsi in maniera sistematica con quanto avviene nei principali centri di ricerca al di là delle Alpi, uscendo dai confini angusti della propria università o del proprio Stato.

A questo scopo, Brioschi aveva pensato di dar vita a un giornale di matematica, coinvolgendo Betti e Genocchi nell'iniziativa che, come egli scriveva nel marzo 1857, «potrebbe avere, a mio credere, molta importanza sul progresso degli studi matematici del nostro paese». L'idea era quella di rilanciare gli «Annali» di Tortolini che, agli occhi di Brioschi, non corrispondevano allo scopo principale di un giornale di matematica, quello di «far conoscere fuori d'Italia il movimento scientifico italiano, e di tenere al fatto gli Italiani del movimento scientifico degli altri paesi civilizzati».

«L'idea di una redazione collettiva non è nuova», scriveva Brioschi, confessando che gli era venuta proprio guardando quanto facevano i matematici di Berlino col «Journal für die reine und angewandte Mathematik», fondato a suo tempo da Crelle. L'appartenenza dei membri della redazione a Stati diversi – cui Brioschi dichiarava di tenere particolarmente – non era soltanto una circostanza legata alla geografia politica dell'Italia prerisorgimentale.

Quegli uomini, infatti, erano accomunati da profondi sentimenti patriottici, che avevano trovato espressione nelle battaglie del 1848. Quando i milanesi insorgono nelle Cinque giornate il giovane Brioschi, mazziniano intransigente, partecipa all'insurrezione, viene fatto prigioniero dagli austriaci e liberato dagli insorti. Betti prende parte alla Prima guerra d'indipendenza combattendo a Curtatone nel battaglione degli studenti della Scuola Normale guidato da Mossotti, mentre Genocchi partecipa alla liberazione di Piacenza e, dopo il ritorno degli Austriaci, abbandona la città natale per andare in esilio volontario a Torino fino a quando «Piacenza dovrà soffrire il sozzo aspetto dei Croati».

L'impresa degli «Annali» si colloca cosí nel quadro della formazione di un'identità politica del paese e, sul piano scientifico, risponde alla necessità di creare una cultura matematica in grado di portare l'Italia al livello delle altre nazioni europee. Nel 1858 il primo numero del nuovo giornale si apre con un *Avviso dei compilatori*, che invita «i geometri italiani» a impegnarsi affinché «un giornale che si propone di rappresentare lo stato della scienza tra noi, possa richiamare l'attenzione continua dei dotti degli altri paesi; e far cessare il lamento che i nostri lavori non sono conosciuti fuori d'Italia»[1].

Da parte sua, Brioschi contribuisce al nuovo giornale con una grande memoria che raccoglie e presenta in maniera sistematica i risultati raggiunti in uno dei suoi campi di ricerca favoriti, la teoria degli invarianti. Nel 1854 egli aveva pubblicato *La teorica dei determinanti e le loro principali applicazioni*, un volume ben presto tradotto in francese e tedesco, che lo aveva fatto conoscere al pubblico matematico europeo. Se pur rimasta incompiuta, la *Teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie* (1858) di Brioschi, apparsa nei fascicoli degli «Annali», contribuí a diffondere nel nostro paese l'interesse per questi argomenti, allora oggetto di ricerca nei piú avanzati centri europei. Sulla scia dei lavori di Hermite e Kronecker, nello stesso anno Brioschi perviene alla risoluzione delle equazioni algebriche di 5° grado mediante trascendenti ellittiche, un tema al quale aveva contribuito anche Betti all'inizio della sua carriera. Allievo di Mossotti a Pisa, su consiglio del maestro Betti si era infatti dedicato alla teoria delle equazioni algebriche, seguendo le idee di Abel e le «tracce poche e interrotte» lasciate da Galois.

Per i risultati ottenuti nel 1857 Betti era stato chiamato a ricoprire la cattedra di algebra all'Università di Pisa, ma l'incontro con Riemann rappresentò una vera e propria svolta nella sua carriera scientifica. Di ritorno da Gottinga, egli pubblicò negli «Annali» la traduzione italiana della tesi di Riemann sui fondamenti della teoria delle funzioni di una variabile complessa (1851), un testo destinato ad avere un'enorme influenza sullo sviluppo della matematica moderna e, sotto l'influenza di Riemann, rivolse i propri interessi all'analisi complessa. Nel 1860 fece della teoria delle funzioni ellit-

[1] Per le citazioni delle lettere di Brioschi e l'*Avviso dei compilatori* si veda Bottazzini [1998].

tiche argomento delle sue lezioni all’università, che poi raccolse in un’ampia monografia anch’essa apparsa nei fascicoli degli «Annali» nel corso del 1860 e 1861. Ad essa fece seguito la memoria *Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa*, in cui Betti riotteneva alcuni risultati di Riemann seguendo una via puramente algebrica, senza far ricorso a integrali.

L’impegno scientifico si accompagna a una decisa azione dei matematici sul terreno politico e istituzionale. Nel 1859 Brioschi, divenuto nel frattempo rettore dell’Università di Pavia e segretario particolare di Carlo Matteucci (1811-1868), il fisico pisano allora ministro della Pubblica istruzione, pone le premesse per la creazione nel 1863 di un nuovo istituto d’istruzione superiore a Milano, l’Istituto Tecnico Superiore (l’odierno Politecnico) sul modello delle *Grandes Écoles* francesi e delle *Technische Hochschulen* tedesche, istituto che egli dirigerà per oltre trent’anni. Come si legge nel *Programma* per l’anno accademico 1863, compito dell’istituto era quello di «formare ingegneri civili e ingegneri meccanici, abilitare all’insegnamento negli istituti tecnici secondari» oltre che di «offrire agli studiosi un centro di cultura scientifica e tecnica». Un’istituzione destinata a esercitare «una grande influenza sulla cultura nazionale» e «sulla ricchezza pubblica», affermava Brioschi nel discorso di inaugurazione pubblicato nelle «Effemeridi della pubblica istruzione» e in traduzione tedesca l’anno successivo.

«Le istituzioni scolastiche non hanno probabilità di soddisfare alla loro missione – affermava allora Brioschi – se la creazione e l’ordinamento di esse non corrisponde ai nuovi bisogni della scienza e alle nuove condizioni sociali». La lezione che «la storia civile delle nazioni» rendeva evidente era che le «piú grandi rivoluzioni politiche» si accompagnavano o alla creazione di nuovi istituti o a «profonde modificazioni nell’ordinamento degli esistenti», come era avvenuto ad esempio in Francia dopo la rivoluzione dell’Ottantanove, con la creazione dell’École Polytechnique e dell’École Normale. Se si guardava alla situazione prodotta dalla guerra d’indipendenza, continuava Brioschi, chiunque «per quanto poco favorevole possa essere a noi, dovrà pur confessare che qui si è compiuto una grande rivoluzione politica, amministrativa, economica». Cosa si poteva dire dell’ordinamento scolastico, che «riflette la coltura della nazione»? Nel nostro paese erano «quasi completamente sconosciuti i luminosi esempi forniti dalle nazioni piú civili», e una «rivoluzione», analoga a quella politica, che rimediasse alla situazione ereditata dai «governi che tennero divisa l’Italia» era, secondo Brioschi, «uno dei piú urgenti bisogni» del nuovo Stato unitario.

La creazione dell’Istituto Tecnico faceva seguito all’istituzione di nuove cattedre universitarie. Nel 1860, prima a Bologna e poi a Napoli, erano state create due cattedre di geometria superiore. A ricoprire la prima venne nominato con un regio decreto Luigi Cremona, mentre a Napoli fu un decreto dittatoriale di Garibaldi a nominare Giuseppe Battaglini (1826-1892), un tenace oppositore dei purismi euclidei che avevano dominato la matematica napoletana nella prima metà del secolo e, per contro, un convinto fautore delle nuove geometrie non euclidee che contribuirà a diffondere nel nostro paese dalle pagine del suo «Giornale di matematiche», fondato nel 1863.

2. *La nascita di una scuola di geometria.*

Come Brioschi, anche Cremona fu uno dei protagonisti della generazione di matematici risorgimentali che, negli anni immediatamente successivi all'Unità, contribuirono alla rinascita della matematica italiana. A soli diciott'anni aveva lasciato la scuola per arruolarsi coi volontari del battaglione di studenti napoletani «Italia Libera» accorsi in difesa di Venezia. Dopo la resa della città veneta nell'agosto 1849, Cremona ritornò agli studi, conclusi nel 1853 con la laurea d'ingegnere civile e architetto. Dopo esser stato costretto a vivere dando ripetizioni di matematica per l'opposizione del governo austriaco ad inserire nei ruoli dell'insegnamento pubblico l'antico difensore di Venezia, finalmente nel 1855 fu ammesso al ginnasio della città di Cremona e poi nel 1859, quando la Lombardia passò al Regno del Piemonte, fu nominato professore al liceo di Milano[2].

La passione politica e civile, che animava i matematici risorgimentali, trova espressione nelle parole della *Prolusione* che Cremona rivolse agli studenti del suo primo corso di lezioni a Bologna. La moderna geometria che da molti anni si insegnava in Francia, in Germania e in Inghilterra era «un ospite affatto nuovo» delle università italiane, affermava Cremona. Dopo aver tracciato il programma del corso, il primo corso della moderna geometria proiettiva tenuto nelle nostre università, egli invitava gli studenti a respingere le voci di coloro che obiettavano sull'utilità di tali studi, esortandoli al contrario a studiare con passione scientifica e impegno civile la scienza pura e le piú astratte teorie matematiche, consapevoli dei «servigi che la scienza rende presto o tardi alla causa della civiltà e della libertà».

Gli anni trascorsi a Bologna rappresentano il suo periodo piú creativo e fecondo. Nel 1861 Cremona diede alle stampe l'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, un lavoro che forniva una trattazione sistematica «con metodo geometrico semplice e uniforme» di argomenti già presenti ai geometri europei. Come ebbe a scrivere Max Noether [1904, p. 7], «con i suoi metodi e con le sue concezioni [Cremona] aveva ristabilito i rapporti tra la geometria pura e l'intero sviluppo analitico-geometrico che si era affermato con Plücker, Hesse e Clebsch, con Salmon e Cayley». Assai piú originale era il contenuto di due successivi articoli del 1863 e 1865 dedicati allo studio delle proprietà di quelle particolari trasformazioni di figure piane,

[2] Per la biografia di Cremona si vedano Berzolari [1906] e Loria [1904].

che ancora oggi si chiamano «cremoniane». Infine, nel 1867 egli pubblicava i *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*. Questa lunga memoria, ben presto tradotta in tedesco, insieme con una memoria sulle superfici del terz'ordine, con cui aveva vinto il premio Steiner, costituí per molto tempo un testo di riferimento per lo studio delle superfici algebriche.

Nello stesso anno, su proposta di Brioschi, ancora per decreto Cremona viene chiamato a insegnare geometria superiore all'Istituto Tecnico Superiore di Milano. Dai suoi corsi hanno origine due testi ben presto divenuti dei classici, gli *Elementi di geometria proiettiva* (1873), a lungo adottati nell'insegnamento superiore nelle nostre università e tradotti in francese, tedesco e inglese, e gli *Elementi di calcolo grafico* (1874), anch'essi tradotti in tedesco e inglese. La stretta collaborazione con Brioschi si traduce in iniziative di grande momento per la matematica italiana: la riforma dell'insegnamento della geometria nelle scuole classiche, con la (contrastata) introduzione degli *Elementi* di Euclide come libro di testo, e la condivisione, con Brioschi, della direzione degli «Annali», che rilancia la rivista a livello internazionale.

La riforma dell'insegnamento, auspicata dal Consiglio superiore della Pubblica istruzione, di cui fanno parte Betti e Brioschi, e tradotta in legge dal ministro Coppino, coincise con la pubblicazione di una nuova edizione degli *Elementi*, curata dagli stessi Betti e Brioschi, per la quale Cremona si assunse il lavoro materiale di preparazione per la stampa. La scelta di adottare il testo euclideo come manuale per l'insegnamento della geometria nelle scuole classiche provocò vivaci reazioni, come quelle che si leggono ad esempio nelle lettere allora scambiate tra Genocchi e Betti.

La polemica raggiunse il pubblico matematico attraverso le pagine del «Giornale di matematiche» di Battaglini, che ospitò interventi critici e la decisa risposta di Brioschi e Cremona alle critiche. Difendendo la riforma, Cremona scriveva a Betti che «l'Euclide è ancora il sistema piú logico, piú rigoroso che abbiamo: tutti i sistemi posteriori sono ibridi, impuri; volendo riparare a un difetto, cadono in dieci altri piú gravi, e soprattutto cessano di essere dei veri sistemi geometrici». E poi, aggiungeva Cremona, «se si pensa ai libri che correvano per le nostre scuole avanti il 1867, e che vi rifluirebbero di nuovo, se si mutassero i programmi», chi potrebbe negare che l'introduzione del testo di Euclide «sia stato un immenso beneficio per la nostra scuola?» Certo, l'intervento legislativo era stato deciso, forse fin troppo, ma senza dubbio ebbe il salutare effetto di far piazza pulita di una quantità di manuali, privi di rigore scientifico e prodotti a soli fini commerciali, ancora largamente adottati nell'insegnamento secondario.

Nel 1873 Cremona si trasferí definitivamente a Roma per dirigervi la Scuola di applicazione per gli ingegneri. Nominato senatore nel 1879, si dedicò in prima persona alla vita politica, fu nel 1898 ministro della Pubblica istruzione nella breve stagione (un mese!) del governo Di Rudiní e, infine, vicepresidente del Senato. Cremona fu maestro riconosciuto di una «scuola» di geometri che comprendeva Riccardo de Paolis (1854-1892), Ettore Caporali (1855-1886), Eugenio Bertini (1846-1933) e Giuseppe Veronese (1854-1917). «Anche se Cremona non ebbe alcun ruolo nella tendenza oggi sempre piú diffusa in Italia verso ricerche astratte – scriveva Noether nel 1904 –, tuttavia la sua spinta verso la generalizzazione, lo spirito delle sue concezioni generali sono penetrati rapidamente e in profondità, dai suoi libri e dalle sue ricerche sulle trasformazioni, nell'indirizzo geometrico del suo paese».

Sotto la guida di Cremona compí i suoi studi a Roma anche il giovane palermitano Giovan Battista Guccia (1855-1914). All'epoca, la vita matematica nel capoluogo siciliano era praticamente inesistente, e solo nei primi anni Ottanta si cominciarono a intravedere segni di rinascita. Guccia fu matematico di modesta originalità ma di grande capacità organizzativa, come mostra la vicenda del Circolo matematico, da lui fondato nel 1884. Nel giro di pochi anni i soci del Circolo, italiani e soprattutto stranieri, si moltiplicarono, mentre la rivista del Circolo, i «Rendiconti», si affermò a livello internazionale, pubblicando articoli che sono passati alla storia, opera dei piú autorevoli matematici del tempo.

3. *La «scuola» pisana.*

Per circa due anni, dall'autunno 1863 all'estate 1865, Riemann soggiornò nel nostro paese su consiglio del medico, per le sue compromesse condizioni di salute. In quel periodo si stabilí a Pisa, rinsaldando l'amicizia con Betti. Questi, dopo la morte di Mossotti, gli aveva offerto un posto di insegnamento alla Normale. Il grande matematico tedesco tuttavia soffriva di tubercolosi, e si vide costretto a rinunciare nell'impossibilità di «parlare ad alta voce» se non «con molta fatica». A succedere a Mossotti fu quindi chiamato Beltrami, che, su suggerimento di Cremona e iniziativa di Brioschi, nel 1862 era stato nominato con un regio decreto professore di algebra e geometria analitica all'Università di Bologna.

La presenza di Riemann a Pisa esercitò un'insostituibile funzione di stimolo per Betti che, soprattutto nei primi tempi, trovò nelle conversazioni col geniale matematico di Gottinga occasione di riflessione e spunti di ricerca. «Ho nuovamente parlato con Riemann della connessione degli spazi e me ne sono fatto un'idea esatta», scriveva a Tardy il 6 ottobre 1863, illustrando con esempi la nozione di spazio semplicemente e molteplicemente connesso. Una decina di giorni piú tardi, rispondendo all'amico che lo invitava a comunicargli qualche cosa delle sue conversazioni «coll'impareggiabile Riemann», Betti esponeva il contenuto essenziale della memoria *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni*, che pubblicherà solo nel 1870. In quel pionieristico lavoro di topologia algebrica, Betti introduceva tra l'altro gli invarianti che Poincaré chiamerà «numeri di Betti».

Gli argomenti degli incontri con Riemann dovevano abbracciare uno spettro molto ampio di questioni, dalla teoria delle funzioni, a quella delle superfici minime a problemi di fisica matematica. È significativo che, proprio durante quel soggiorno, Betti cominciasse a dedicarsi a ricerche di fisica matematica, di teoria dell'elasticità e di teoria del potenziale in particolare, che fece oggetto dei suoi corsi per oltre vent'anni, oltre che di numerosi lavori.

Tra il 1872 e il 1873 egli pubblicò una lunga memoria sulla *Teoria dell'elasticità* che forní il punto di partenza di una fiorente scuola che si sviluppò in Italia tra gli ultimi decenni del secolo e l'inizio del nuovo, e vide tra i cultori studiosi formati alla Normale come Carlo Somigliana (1860-1955) e Orazio Tedone (1870-1922), uno degli ultimi allievi di Betti. In quel lavoro questi forniva la dimostrazione e numerose applicazioni del cosiddetto «teorema di reciprocità» che oggi porta il suo nome. Il teorema afferma che se si considerano due stati di equilibrio di uno stesso corpo sotto l'azione di due sistemi di forze, il lavoro fatto dalle forze del primo sistema quando intervengono le deformazioni dovute al secondo è uguale al lavoro delle forze del secondo sistema quando intervengono le deformazioni dovute al primo. Con le parole di Betti, quel teorema «nella teoria delle forze elastiche dei corpi solidi tiene il luogo che il teorema di Green ha nella teorica delle forze che agiscono secondo le leggi di Newton»[3]. Quest'ultima teoria fu argomento di numerosi lavori di Betti, culminati nel volume *Teorica delle forze Newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo* apparso nel 1879 (e, in traduzione tedesca, nel 1886).

Sembra che nelle sue conversazioni Riemann avesse fatto cenno al contenuto della sua inedita tesi di abilitazione sulle funzioni rappresentabili in serie trigonometrica, mentre nella corrispondenza dei matematici che allora ebbero modo di incontrarlo non si trova alcuna allusione alla sua altrettanto inedita lezione di abilitazione sui fondamenti della geometria (entrambe pubblicate postume nel 1867). Fu proprio la lettura approfondita di quest'ultima a convincere Beltrami a metter da parte dubbi ed esitazioni, e dare alle stampe il suo *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea*, apparso nel «Giornale» di Battaglini nel 1868.

Fin dalle sue prime ricerche, pubblicate negli «Annali», Beltrami si era rivolto a problemi di geometria differenziale delle superfici, sul solco delle classiche memorie di Gauss. Dopo il suo trasferimento a Pisa, cominciò a pubblicare le *Ricerche di analisi applicata alla geometria* (1864) suggerite dallo studio del *Traité du calcul différentiel* di Bertrand, apparso quello stesso

[3] Il testo di Betti è stato ripubblicato a cura di D. Capecchi, G. Ruta e R. Tazzioli [2006].

anno. Pur se presentate in forma frammentaria e mai concluse, le *Ricerche* contengono risultati di grande importanza, come l'introduzione dei cosiddetti parametri differenziali, funzioni invarianti (di flessione) delle superfici, dei quali Beltrami darà poi una trattazione sistematica nella memoria *Sulla teoria generale dei parametri differenziali* (1868).

Lo studio di alcuni lavori di Lagrange sulla costruzione delle carte geografiche, argomento connesso ai suoi compiti di insegnamento della geodesia, e la traduzione italiana di una memoria di Gauss sulla rappresentazione conforme delle superfici, portarono Beltrami ad affrontare il problema della rappresentazione di una superficie su un piano, in modo che a geodetiche della superficie corrispondano rette del piano. Il risultato essenziale, pubblicato nel 1866, era che «le sole superfici suscettibili di essere rappresentate sopra un piano in modo che a ogni punto corrisponda un punto e a ogni geodetica una retta sono quelle la cui curvatura è dovunque costante». Per questa via era entrato «senza volerlo, e quasi senza saperlo, nelle dottrine di Lobačevskij, Riemann», egli scriveva nel 1872 a Enrico D'Ovidio (1842-1933), un allievo di Battaglini a Napoli, che cominciava allora la sua carriera di insegnamento della geometria analitica all'Università di Torino, durata oltre quarant'anni[4].

Beltrami si rese conto infatti che la geometria su una superficie regolare a curvatura costante negativa è quella di Lobačevskij, nel senso che le geodetiche sulla superficie si comportano come le rette del piano non euclideo. Da qui l'idea di considerare una tale superficie – la pseudosfera generata dalla rotazione di una trattrice attorno al suo asse – e la sua rappresentazione sul piano euclideo, ottenendo cosí un modello euclideo della geometria non euclidea.

È questa la chiave di lettura del *Saggio*, che egli aveva mostrato all'amico Cremona. Questi aveva obiettato che, siccome Beltrami si serviva dell'ordinario calcolo infinitesimale «fondato sul concetto euclideo», non poteva essere sicuro che, per ciò stesso, non avesse «pregiudicato il finale risultamento, incappando in un circolo vizioso». Pur se non del tutto convinto, Beltrami «lasciò dormire lo scritto» in un cassetto, per decidersi a pubblicarlo quando si rese conto che il suo lavoro era «sostanzialmente concordante con alcune delle idee» riemanniane.

L'argomento era allora dei piú controversi. Il *Saggio* di Beltrami apparve a stampa in un clima di accesi contrasti tra sostenitori entusiasti delle nuove geometrie, come Battaglini, che nel suo «Giornale» aveva pubblicato traduzioni dei fondamentali scritti di Bolyai e Lobačevskij, e loro accaniti oppositori, come Giusto Bellavitis (1803-1880), il professore di geometria a Padova che per tutta la vita continuò a considerare la geometria non euclidea una «geometria da manicomio».

[4] Citato in Loria [1901], p. 421.

Nella convinzione che «la critica profonda dei principî non può mai nuocere alla solidità dell’edificio scientifico», dopo alcune prudenti premesse tese a mostrare che egli era ancorato «alle buone tradizioni della ricerca», nel *Saggio* Beltrami mostrava che si poteva ottenere un modello euclideo del «nucleo essenziale» della geometria piana di Lobačevskij associando punti e geodetiche della pseudosfera a punti e corde di un cerchio del piano euclideo (*cerchio limite*). Con un opportuno dizionario, le proposizioni della geometria di Lobačevskij si potevano tradurre in termini euclidei. Il «modello» di Beltrami mostrava che un’eventuale contraddizione nella prima si sarebbe tradotta in una contraddizione nella geometria euclidea e viceversa. Una conclusione davvero inaspettata e sconcertante per chi ancora rifiutava alla geometria non euclidea diritto di cittadinanza in matematica!

Nonostante le cautele di Beltrami, il suo *Saggio* non convinse gli oppositori. Dubbi vennero manifestati anche da Genocchi, che mise in discussione la stessa premessa del lavoro, ossia l’esistenza di superfici ovunque regolari (cioè senza singolarità, come è ad esempio il vertice in un cono) a curvatura costante negativa come la pseudosfera, su cui Beltrami appoggiava le sue considerazioni. (L’acuta osservazione di Genocchi troverà conferma nel teorema, dimostrato da Hilbert nel 1901, che non esiste una superficie a curvatura costante negativa, regolare in tutta la sua estensione).

Nonostante le critiche, il modello di Beltrami aveva inaugurato una nuova era. Ad esso fecero seguito il modello di Klein e quello di Poincaré, che rivelava come la geometria di Lobačevskij fosse la geometria «naturale» per studiare le proprietà di una classe importante di funzioni, definite sul semipiano complesso positivo.

L’anno seguente Beltrami dava alle stampe una seconda memoria, la *Teoria fondamentale degli spazi a curvatura costante* (1869), ispirata alle idee di Riemann, in cui egli estendeva allo spazio a *n* dimensioni le considerazioni presentate nel *Saggio.* Ancor prima che questo venisse pubblicato, Beltrami aveva lasciato Pisa per ritornare a Bologna su una cattedra di geometria. Ma anche il soggiorno bolognese non doveva durare a lungo, e Beltrami si trasferí prima a Pavia e infine a Roma. Anche i suoi interessi di ricerca nel frattempo erano mutati. Tuttavia, le geometrie non euclidee continuarono a restare sullo sfondo delle sue indagini anche quando, dalla metà degli anni Settanta, egli si dedicò soprattutto a questioni di fisica matematica e di «filosofia naturale»[5].

Come per Beltrami, anche per Ulisse Dini (1845-1918), uno dei primi e piú brillanti allievi di Betti, la geometria differenziale costituí l’iniziale campo d’indagine. Su suggerimento del maestro, nel 1865 egli trascorse un periodo di studio a Parigi, per seguire i corsi di Bertrand e Bonnet e, in pochi mesi,

[5] Si veda a questo proposito Tazzioli [2000].

riuscí a completare non meno di dieci lavori su particolari classi di superfici, come le superfici a curvatura costante, le superfici applicabili, le superfici rigate o le superfici «gobbe», questioni che all'epoca apparivano sostanziali nella geometria differenziale delle superfici [cfr. Bortolotti 1953].

Dal 1867 le ricerche di Dini in questo campo si intrecciano con lavori sulla teoria delle serie infinite. Chiamato infatti, su proposta di Betti, a insegnare algebra complementare, Dini iniziava la sua lunga carriera di professore a Pisa, durata ininterrottamente per oltre cinquant'anni. Il corso di algebra, nell'impianto disegnato dieci anni prima da Betti, prevedeva l'iniziale esposizione della teoria delle serie. In quei lavori Dini affinava e generalizzava i criteri di Kummer e Gauss per la convergenza delle serie, e completava i risultati di Weierstrass e Riemann sulla convergenza dei prodotti infiniti, rivelando le doti di rigore e acume critico che dovevano renderlo celebre. Dini doveva riprendere l'argomento nell'ultimo corso di analisi superiore che egli tenne all'università nel 1917-18, pubblicato postumo.

Dal 1870 Dini si era dedicato a questioni di analisi, che divenne l'oggetto esclusivo delle sue ricerche e del suo insegnamento. Ancora su suggerimento di Betti, egli cominciò ad affrontare il cosiddetto «problema di Dirichlet», ossia il problema di determinare una funzione armonica all'interno di un dominio, che sul contorno assume valori assegnati con continuità. Egli poi studiò il problema di Dirichlet generalizzato e il problema di Neumann di determinare una funzione armonica in un dominio, della quale è assegnata la derivata normale continua sul contorno.

Il problema, sorto nel contesto dello studio delle forze newtoniane per il ruolo fondamentale svoltovi dalla funzione potenziale, aveva trovato nuova attualità nella teoria riemanniana delle funzioni di variabile complessa, che a ragione è stata anche definita una teoria del potenziale bidimensionale. Per risolvere il problema Riemann aveva fatto ricorso al cosiddetto «principio di Dirichlet», che asseriva l'esistenza del minimo di un certo integrale doppio, «principio» che tuttavia nel 1870 era stato confutato da Weierstrass con un controesempio.

Nella ricerca di metodi alternativi per risolvere il problema, senza far ricorso al discusso «principio», si impegnarono i maggiori analisti del tempo a cominciare da Hermann Amandus Schwarz – un fedele seguace dei metodi di Weierstrass –, che aveva trattato l'argomento in una serie di note sulla rappresentazione conforme di una figura piana, sottoposta a opportune limitazioni, e sull'integrazione dell'equazione di Laplace. Dini allora si rivolse a Schwarz per avere lumi sui metodi introdotti dal grande analista di Berlino, «ed egli con una gentilezza di cui gli rendo pubbliche grazie, volle comunicarmi alcune notizie intorno ai nuovi metodi che Weierstrass ed altri matematici tedeschi suoi scolari seguivano nelle loro dimostrazioni» [Dini 1878, p. III].

Dini dava pubblico riconoscimento del suo debito verso i matematici della «scuola» di Weierstrass nelle pagine introduttive dei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (1878), il trattato che lo segnalava tra i primi analisti d'Europa, e che venne tradotto in tedesco nel 1892. Ad esso fece seguito un secondo trattato, *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche* (1880), oltre alle *Lezioni di analisi infinitesimale*, tenute nel 1877-78 e pubblicate in varie edizioni litografate, prima di essere stampate nel 1905. In quei volumi Dini pubblicava alcuni risultati classici ai quali oggi è associato il suo nome, come il teorema sulle funzioni implicite, i cosiddetti «numeri derivati», i criteri di convergenza puntuale delle serie trigonometriche e gli sviluppi in serie delle funzioni di Bessel.

In particolare, nei *Fondamenti* Dini interveniva su una celebre e controversa questione relativa a un «teorema» sulla somma di una serie convergente di funzioni continue, enunciato da Cauchy e messo in dubbio per la prima volta da Abel. Ancora negli anni Settanta Heine si chiedeva se la continuità della somma implicasse l'uniforme convergenza della serie. Darboux, Du Bois-Reymond e Cantor avevano dato una risposta negativa, illustrandola con opportuni controesempi, mentre Dini mostrava che quella che egli chiamava convergenza semplicemente uniforme della serie era sufficiente per la continuità della somma. Una condizione necessaria e sufficiente per la continuità sarà poi trovata da Cesare Arzelà (1847-1912), un allievo di Betti e Dini dal 1880 professore di analisi a Bologna, che allo scopo introdusse la nozione di convergenza uniforme a tratti o, come si dice oggi, convergenza quasi uniforme di una serie.

Dopo la pubblicazione delle *Serie di Fourier* per circa vent'anni Dini interruppe quasi del tutto le pubblicazioni scientifiche, completamente assorbito dalla vita politica e parlamentare, e l'annunciato secondo volume del trattato vide la luce solo nel 1911 in edizione litografata. Egli non mancò tuttavia di esercitare con la sua attività una grande influenza sulla vita matematica. Cosí, per esempio, come direttore degli «Annali», pubblicò la tesi di René Baire e quella di Henri Lebesgue che hanno segnato una svolta nella teoria degli insiemi e della misura. Le nuove idee analitiche trovarono un terreno fertile presso giovani matematici come Giuseppe Vitali (1875-1932), un allievo di Dini che pubblicò nel 1905 il primo esempio di insieme di punti non Lebesgue-misurabile. Nonostante questo e altri notevoli risultati, Vitali insegnò a lungo nella scuola secondaria e solo nel 1923 ottenne una cattedra universitaria.

Dini fu prima deputato e poi, dal 1892 senatore, membro del Consiglio superiore della Pubblica istruzione, per un periodo anche sindaco della sua città, e inoltre direttore della Scuola Normale dopo la morte di Betti. Sotto la direzione di Betti la Normale si era affermata come il principale centro di formazione di una nuova generazione di matematici, dai primi allievi come Giulio Ascoli (1867)[6], Eugenio Bertini (1868), Cesare Arzelà (1869) a Salvatore Pincherle (1874), Gregorio Ricci Curbastro (1875), Luigi Bianchi (1877), Mario Pieri (1884) e Federigo Enriques (1891), una schiera di uomini che hanno lasciato una traccia duratura sullo sviluppo della matematica.

4. *Nuovi metodi analitici.*

Delle critiche al principio di Dirichlet, col quale si era cimentato Dini, Casorati aveva avuto notizia fin dall'autunno 1864, quando si era recato a Berlino per incontrare Weierstrass e i suoi colleghi, e avere conoscenza diretta dei loro risultati. Da Kronecker aveva appreso con sorpresa dell'esistenza di funzioni che «non ammettono coefficiente differenziale, che non possono rappresentare linee». E poi, che esistono serie di funzioni che hanno la circonferenza del cerchio di convergenza come «frontiera naturale», cioè luogo di punti singolari, di modo che la funzione non è prolungabile fuori dal cerchio, contrariamente a quello che si era sempre creduto e che lo stesso Riemann pareva ritenere. A questo proposito Weierstrass faceva un criptico accenno al teorema oggi noto col nome di Casorati e Weierstrass, relativo al comportamento di una funzione analitica nell'intorno di una singolarità essenziale. Quanto a Riemann, Casorati annotava nei puoi appunti che a Berlino «le [sue] cose fecero difficoltà». Lo stesso Weierstrass gli disse di aver capito Riemann «perché possedeva già i risultati delle ricerche»[7].

Qualche anno piú tardi Casorati dava alle stampe il primo volume della *Teorica delle funzioni di variabili complesse* (1868), un'opera che, ancora all'inizio del Novecento, a parere di Klein era la migliore esposizione della teoria secondo il punto di vista riemanniano. Nello stesso anno Casorati, insieme a Brioschi e Cremona, tenne un corso di lezioni sulla teoria delle funzioni abeliane divenuto celebre. All'epoca Casorati stava lavorando al secondo volume della sua *Teorica*, che avrebbe dovuto trattare delle funzioni abeliane secondo i metodi di Riemann, in cui il «principio di Dirichlet» ha un ruolo essenziale. Tuttavia, le critiche di Kronecker e Weierstrass e l'incapacità di fugare i dubbi in proposito lo convinceranno alla fine a rinunciare all'impresa.

Nel 1875, quando ancora si interrogava sulla possibilità di completare la *Teorica*, Casorati coinvolse nelle proprie ricerche Salvatore Pincherle (1853-1936), un allievo di Betti e Dini che era stato nominato professore al liceo di Pavia. Nel 1877-78 Pincherle trascorse un periodo di studi a Berlino dove seguí i corsi di Kronecker e Weierstrass. Quest'ultimo doveva esercitare

[6] Tra parentesi sono indicati gli anni in cui i matematici citati completarono gli studi alla Normale.

[7] Per le citazioni dalle note di Casorati si veda Bottazzini [1994].

un'influenza duratura sul giovane matematico. Tornato in Italia, Pincherle pubblicò nel «Giornale» di Battaglini un *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. Weierstrass* (1880), la teoria che il grande analista presentava nei suoi corsi ma rifiutava di dare alle stampe finché non avesse raggiunto il rigore desiderato. In assenza di pubblicazioni di Weierstrass, che anzi scoraggiava i suoi allievi a dare alle stampe i loro appunti, il *Saggio* di Pincherle restò a lungo un testo di riferimento per chi voleva familiarizzarsi coi nuovi metodi analitici.

Lo stesso Pincherle, chiamato nel 1881 all'Università di Bologna, fece della teoria delle funzioni analitiche secondo Weierstrass l'argomento privilegiato delle sue lezioni oltre che dei suoi lavori di ricerca. Infatti, come egli stesso scriveva nel 1925 guardando ai suoi esordi, mentre la teoria delle funzioni di variabile reale costituiva verso il 1880 «un capitolo considerevole» dell'analisi, «gli sviluppi di funzioni analitiche in serie ordinate, secondo i polinomi di Legendre, le funzioni di Bessel, i prodotti speciali [...] non erano stati studiati affatto se non in casi particolari»[8]. Quegli sviluppi erano oggetto di lavori di Pincherle, nei quali si trova tra l'altro stabilito un fondamentale teorema di ricoprimento che corrisponde, per le regioni piane, a una proposizione enunciata da Heine la cui importanza venne messa in luce da Borel, e che per questa ragione spesso viene indicata col nome di Heine e Borel.

A partire da quei lavori, e da studi sulla trasformazione di Laplace, Pincherle elaborò un'originale linea di ricerca. Nel 1886 pubblicò il primo di numerosi articoli sulle «operazioni funzionali», da lui intese come le operazioni che applicate alle funzioni analitiche danno origine a funzioni analitiche, e godono inoltre della proprietà distributiva. Quel pionieristico lavoro segnava la nascita di una nuova branca dell'analisi, l'analisi funzionale. Pincherle darà una presentazione sistematica dei risultati da lui ottenuti nel volume *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* (1901), scritto in collaborazione con l'allievo Ugo Amaldi.

I nuovi concetti di rigore propugnati dagli analisti tedeschi, di cui Pincherle si era fatto fautore nel campo dell'analisi complessa, trovarono un originale interprete in Giuseppe Peano (1858-1932), un giovane allievo di Genocchi a Torino. Dal 1865 Genocchi teneva corsi di calcolo differenziale e integrale, ispirandosi ai metodi e ai risultati di Cauchy e della scuola francese, da Serret a Bertrand e Hermite. Anche se ormai le novità in analisi venivano piuttosto da Berlino che da Parigi, in un ambiente matematico come quello torinese ancora largamente dominato dalla tradizione e dalle idee di Lagrange, quella di Genocchi era solo a prima vista una scelta «antiquata».

Il manoscritto dei suoi corsi, arricchito nel corso degli anni di note e aggiunte, non fu mai pubblicato e certo non rivela le raffinatezze di analisi

[8] Citato in Bottazzini [1994], p. 211.

dei *Fondamenti* di Dini o del trattato di *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, che nel 1884 Peano diede alle stampe col nome del maestro, corredandolo di «importanti aggiunte» e varie annotazioni. Genocchi si affrettò a disconoscere quell'opera e qualche anno piú tardi Peano ne rivendicherà la completa paternità, «come se sul frontespizio non comparisse altro nome che il mio». Di fatto, il Genocchi-Peano costituisce uno degli esempi paradigmatici del moderno rigore introdotto in analisi da Weierstrass, e a ragione figura tra i piú autorevoli trattati di analisi dell'Ottocento, se non tra i piú importanti trattati mai scritti, come ha autorevolmente sostenuto Alfred Pringsheim nell'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*.

Ciò che caratterizza quel trattato è la scrupolosa precisione con cui Peano fa notare le inesattezze, se non i veri e propri errori, in teoremi e dimostrazioni che ancora si trovavano nei manuali piú recenti e autorevoli. La critica rigorosa e puntuale di Peano mette in luce debolezze logiche in ragionamenti fino ad allora comunemente accettati, i suoi controesempi falsificano teoremi che riguardano concetti fondamentali, come quello di continuità di una funzione di una o piú variabili, di curva o di area di una figura piana. L'esempio piú sorprendente, a questo proposito, è quello di una curva continua che riempie un quadrato, che egli presenta nel 1890. Nello stesso anno pubblica la dimostrazione dell'esistenza degli integrali di sistemi di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine sotto la sola ipotesi della continuità della funzione, un risultato che estende ai sistemi di equazioni un suo precedente teorema sull'integrale di un'equazione differenziale ordinarie del primo ordine. «Tutta la dimostrazione è ridotta in formule di logica analoghe alle formule dell'algebra», scriveva allora Peano, giacché, «benché non sia difficile, il suo sviluppo completo col linguaggio ordinario sarebbe d'una complicazione eccessiva» [Peano 1959, vol. I, p. 120]. A quell'epoca, infatti, Peano aveva già elaborato i concetti essenziali della logica matematica che dovevano renderlo celebre.

5. *«Una nuova branca della matematica».*

«L'analisi generale non avrebbe potuto neppure essere concepita senza i lavori dei matematici italiani, e particolarmente di due di loro: i sigg. Pincherle e Volterra», affermava nel 1928 Maurice Fréchet, intervenendo al Congresso internazionale dei matematici che si tenne a Bologna sotto la presidenza di Pincherle. I due studiosi «avevano fondato una nuova branca della matematica», aggiungeva in quella circostanza Jacques Hadamard, osservando che «il sig. Pincherle si è soffermato particolarmente sulla nozione di trasformata», mentre «il sig. Volterra, al contrario, considera ciò che al giorno d'oggi chiamiamo un funzionale» [Hadamard 1968, vol. I, p. 440].

Nelle parole di Fréchet e Hadamard c'era l'esplicito riconoscimento del ruolo pionieristico dei matematici italiani nella creazione di una nuova branca dell'analisi. Dopo i suoi primi lavori sulle operazioni funzionali, Pincherle aveva studiato la geometria degli spazi funzionali, come ad esempio lo spazio costituito dalla totalità delle funzioni analitiche nell'intorno di un punto. Come ha fatto notare Pincherle, ogni sviluppo in serie di potenze, che rappresenta un elemento di una funzione analitica, si può infatti considerare come un punto di uno spazio funzionale (lineare) a un'infinità (numerabile) di dimensioni, le cui coordinate sono date dai coefficienti della serie. Seppur introdotta in termini analitici piú che geometrici, l'idea di spazio a infinite dimensioni si affacciava per la prima volta in questi lavori di Pincherle. Nelle *Operazioni distributive* la teoria degli spazi lineari era invece presentata in maniera assiomatica, a partire da un insieme arbitrario di elementi.

L'autorità di Pincherle in questo campo era internazionalmente riconosciuta, tanto che gli fu chiesto di scrivere l'articolo sulle operazioni e le equazioni funzionali per la grande *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, promossa da Klein. L'articolo apparve nel 1907 e, in edizione francese, nel 1912.

A Bologna Pincherle aveva come collega all'università Arzelà, che aveva iniziato la sua carriera nel 1878 come professore di algebra a Palermo, ma nel 1880 si era trasferito a Bologna sulla cattedra di calcolo differenziale e integrale. I suoi interessi scientifici si erano rivolti prima all'algebra (e in particolare alla teoria di Galois, che espose in uno dei suoi corsi) e poi all'analisi reale. Tra i suoi contributi piú originali, oltre alla già ricordata introduzione del concetto di convergenza uniforme a tratti, figura la dimostrazione nel 1889 di un teorema che assicura l'esistenza della curva limite per una famiglia di curve piane date in forma parametrica, teorema che estende un risultato enunciato da Giulio Ascoli (1843-1896).

Il concetto di equicontinuità di una curva, insieme al teorema di Ascoli e Arzelà, ha acquisito grande importanza per il suo ruolo nel metodi diretti del calcolo delle variazioni, nei quali si affronta direttamente il problema dell'esistenza del minimo di un funzionale invece di determinarlo come soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange. Quei metodi furono introdotti da Hilbert per risolvere il problema di Dirichlet. Nel 1897 lo stesso Arzelà si cimentò senza successo con quel problema. Secondo Leonida Tonelli (1885-1946), quel lavoro di Arzelà sul problema di Dirichlet costituiva il primo tentativo di risolvere con un metodo diretto un problema di calcolo delle variazioni e rappresentava un momento essenziale del costituirsi di una «scuola italiana» di calcolo delle variazioni. Di quella «scuola» lo stesso Tonelli si dichiarava erede e originale interprete, come mostrava il suo trattato *Fondamenti di calcolo delle variazioni* (1922). In realtà, in quel lavoro Arzelà si richiamava piuttosto ai risultati sulle «funzioni dipendenti da linee» ottenuti da Vito Volterra (1860-1940), che era stato suo allievo all'Istituto Tecnico di Firenze prima di seguire i corsi di Betti e di Dini alla Normale di Pisa.

Ancora studente, Volterra aveva pubblicato importanti lavori di analisi sotto l'influenza di Dini. Pochi mesi dopo essersi laureato con Betti con una tesi di idrodinamica, a soli 23 anni Volterra fu nominato professore di meccanica razionale a Pisa. Dopo la morte di Betti, Volterra si trasferí a Torino e infine, nel 1900, a Roma come successore di Beltrami. Le sue prime note sulle funzioni dipendenti da linee risalgono al 1887. «Consideriamo per esempio tutte le linee continue che si possono tracciare su un dominio bidimensionale», scriveva allora Volterra. «Facendo corrispondere a ogni linea un valore di una variabile, definiremo una *funzione di una linea* nel dominio dato». Per queste funzioni di linea Volterra definiva i concetti fondamentali di continuità, differenziazione e variazione, gettando le basi di quello che Hadamard chiamò il calcolo funzionale.

Nello stesso ordine di idee si colloca lo studio di due tipi di equazioni integrali (oggi note col suo nome) che egli risolse considerandole come caso limite di (un numero infinito di) equazioni algebriche. A questi argomenti Volterra dedicò una quantità di articoli e volumi diventati classici, come le *Leçons sur les fonctions de lignes* (1913), le *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* (1913) e, infine, la *Théorie générale des fonctionnelles* (1936).

Quando apparve quest'ultimo volume, scritto in collaborazione con Joseph Perès, Volterra era un'autorità internazionalmente riconosciuta. Ai suoi contributi alla nascita dell'analisi funzionale, si accompagnarono negli anni Venti pionieristici lavori nel campo della biomatematica – in particolare lo studio della dinamica del sistema prede-predatori per famiglie di pesci, descritta dall'equazione differenziale che porta il suo nome (congiuntamente a quello di Lotka). Erede della tradizione risorgimentale, sull'esempio dei maestri Volterra coniugò la sua attività di ricerca con un'intensa attività sul terreno politico e istituzionale. Nominato senatore nel 1905, si impegnò nella creazione di organismi per promuovere lo sviluppo della scienza in Italia, come la Società Italiana per il Progresso delle Scienze e, dopo la Prima guerra mondiale, il Consiglio nazionale delle ricerche, di cui fu il primo presidente. Inoltre, in qualità di presidente dell'Accademia dei XL, di vicepresidente (1920-23) e poi di presidente (1923-26) dell'Accademia dei Lincei, Volterra svolse un ruolo di primo piano nell'organizzazione della scienza italiana fino al 1931, quando fu allontanato dall'università e da ogni carica accademica per il suo rifiuto di giurare fedeltà al fascismo.

6. *Nuove teorie geometriche.*

L'eredità di Ulisse Dini nel campo della geometria differenziale fu raccolta da Luigi Bianchi (1856-1928). Compiuti gli studi alla Normale, Bianchi trascorse un periodo di perfezionamento a Monaco, dove seguí i corsi di Klein. Tornato in Italia, trascorse l'intera vita accademica a Pisa. Nel 1881 gli fu assegnato un incarico di insegnamento interno alla Normale e, nel 1886, ottenne la cattedra di geometria analitica all'Università. I contributi di Bianchi alla geometra differenziale «classica», e soprattutto alla teoria delle superfici, riempiono diversi volumi delle sue *Opere.* La sua produzione scientifica assomma ad oltre 200 lavori, tra memorie, brevi note e trattati. Oltre 140 di essi sono dedicati alla geometria differenziale, dai suoi primi studi sulle superfici applicabili in spazi a curvatura costante fino al suo ultimo lavoro (sulle metriche di Minkowski) rimasto manoscritto, compresi, in particolare, i numerosi lavori dedicati allo studio delle proprietà delle superfici *W* (come egli le chiamò in onore dell'amico Weingarten), ossia superfici evolventi i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro. Con Weingarten Bianchi condivideva il giudizio sulla fecondità del metodo gaussiano per la geometria differenziale delle superfici, metodo basato su due forme differenziali quadratiche, la prima delle quali dà l'elemento lineare, e la seconda la variazione da una superficie a una superficie parallela infinitamente vicina.

Nel ricorso a tecniche di geometria non euclidea anche per risolvere problemi di geometria euclidea, e nel ruolo fondamentale attribuito alla nozione di trasformazione Guido Fubini (1879-1943), suo allievo a Pisa, vedeva le principali caratteristiche delle ricerche geometriche di Bianchi. Dei risultati via via ottenuti Bianchi arricchí le sue *Lezioni di geometria differenziale* (1894) in quattro volumi, apparse in piú edizioni e in traduzione tedesca, che costituirono a lungo il testo piú autorevole sull'argomento, insieme alle contemporanee *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (1887-96) di Darboux, anch'esse in quattro volumi.

Oltre a quelle *Lezioni*, Bianchi pubblicò una quantità trattati sui piú diversi argomenti, dalla teoria delle funzioni di una variabile complessa e delle funzioni ellittiche alla teoria dei gruppi, dalla teoria dei numeri algebrici alle forme binarie, alla teoria delle equazioni differenziali lineari. Come ebbe a dire Giovanni Sansone (1888-1879), anch'egli suo allievo alla Normale, «coi testi del Bianchi si formarono i matematici di due generazioni, non solo a Pisa ma in tutte le scuole matematiche italiane».

Come Bianchi, anche Gregorio Ricci Curbastro (1853-1925) era stato un allievo di Betti e Dini alla Normale, e anch'egli nel 1877-78 aveva trascorso un periodo di studi a Monaco seguendo i corsi di Klein. Al suo rientro in Italia, dopo esser stato per un breve periodo assistente di Dini, nel 1880

Ricci ottenne un incarico d'insegnamento di fisica matematica all'Università di Padova, dove trascorse tutta la vita accademica. Nel suo primo lavoro, ispirato ai risultati di Beltrami sui parametri differenziali, egli prendeva le mosse dall'osservazione che in geometria differenziale si usavano strumenti «troppo artificiosi», che introducevano elementi e concetti estranei ai problemi che si volevano studiare. In quell'articolo del 1884, che diede avvio alla costruzione di un nuovo calcolo (che Ricci chiamò calcolo differenziale assoluto), egli presentava una classificazione sistematica delle forme differenziali quadratiche e degli invarianti differenziali ad esse associate.

Due anni piú tardi, riprendendo lo stesso argomento, Ricci si serviva per la prima volta della tecnica della derivazione covariante – già introdotta da Erwin Christoffel – per ottenere i coefficienti di una forma differenziale quadratica covariante a una data forma differenziale. Egli si rese conto ben presto della grande importanza e applicabilità del concetto di derivata covariante, e nel 1888 pubblicò un fondamentale articolo, *Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella analisi applicata*, che segna la nascita del calcolo tensoriale. In quel lavoro compare per la prima volta in maniera esplicita la nozione di tensore che, nella definizione di Ricci, è un insieme di funzioni (le componenti) che, per cambiamenti di coordinate, si trasformano secondo leggi ben precise. In questo modo, Ricci rendeva esplicite grandezze che erano già comparse nelle opere di Gauss e Riemann e, in seguito, di Beltrami e Christoffel.

Nei suoi lavori Ricci applicava il nuovo calcolo a questioni geometriche e fisico-matematiche, come la teoria delle superfici e la teoria dell'elasticità, che erano già state affrontate con successo coi metodi «classici». In problemi di quella natura i metodi di Ricci sembravano artificiosi e, anche se fornivano generalizzazioni di grande eleganza, nella sostanza si rivelavano «utili ma non indispensabili», come si legge nel giudizio della commissione che non gli attribuí il Premio reale del 1901. Il calcolo differenziale assoluto, già elaborato in forma compiuta nel 1895, doveva rivelare appieno la sua fecondità solo in seguito alla pubblicazione della memoria *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (1900) che Ricci scrisse insieme al suo allievo Tullio Levi-Civita (1873-1941).

Subito dopo la laurea nel 1894, Levi-Civita aveva trascorso un periodo a Bologna per perfezionarsi in analisi sotto la guida di Pincherle e nel 1897, a soli 24 anni, era risultato vincitore di una cattedra di meccanica razionale all'Università di Padova, dove insegnò per oltre vent'anni, i piú fecondi della sua vita. In quel periodo di grande creatività Levi-Civita pubblica oltre cento lavori passando dalla meccanica analitica e celeste, alla teoria dell'elasticità, all'elettromagnetismo e la teoria del calore. Per quanto importanti siano i suoi contributi in quei campi, come gli studi sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali e sul problema dei tre corpi, non c'è dubbio tuttavia che sia stato l'articolo scritto con Ricci a fare veramente epoca.

Il calcolo differenziale assoluto, scrivevano Ricci e Levi-Civita, era in grado di «forzare un gran numero di fatti, senza alcun legame apparente a raggrupparsi insieme secondo le loro affinità naturali», come essi stessi provavano in quella memoria con un gran numero di applicazioni, geometriche, meccaniche e fisiche. Quel calcolo, insomma, era «lo strumento naturale» per quelle ricerche «dove si incontra come elemento caratteristico una forma quadratica positiva dei differenziali delle *n* variabili o delle loro derivate». Una conferma paradigmatica doveva venire quindici anni piú tardi, con la teoria della relatività generale.

Lo stesso Levi-Civita ebbe un ruolo di primo piano nella corretta formulazione tensoriale delle equazioni del campo gravitazionale. Su questo argomento nel 1915 egli intrattenne con Einstein un fitto carteggio, che il grande fisico non esitò a riconoscere come la corrispondenza piú importante mai capitatagli. Dopo aver cercato invano di rispondere alle critiche di Levi-Civita a una dimostrazione «ottenuta mediante fiumi di sudore», Einstein riconoscerà alla fine che la sua prova era «incompleta», prima di ottenere la forma corretta delle equazioni gravitazioni che, come egli stesso ebbe ad affermare, «rappresentano un vero trionfo dei metodi di calcolo creati dal Ricci».

Un altro contributo fondamentale di Levi-Civita al calcolo tensoriale, e alla teoria della relatività, è dato dalla nozione di trasporto parallelo, da lui introdotta nel 1917 per esprimere la nozione di parallelismo in una varietà riemanniana. Quella nozione, essenziale per formulare la legge d'inerzia nella teoria della relatività, si rivelerà di enorme importanza nelle mani di Hermann Weyl ed Élie Cartan.

Con i suoi lavori, da quelli piú tecnici a quelli di carattere divulgativo, compreso il volume *Fondamenti di meccanica relativistica* (1928), ben presto tradotto in inglese cosí come le sue lezioni di *Calcolo differenziale assoluto* (1925), Levi-Civita contribuí in maniera determinante a diffondere nel nostro paese la teoria di Einstein. Quando apparvero questi volumi Levi-Civita si era da tempo trasferito a Roma dove, insieme a Volterra e Guido Castelnuovo, svolse un ruolo di primo piano nel fare della capitale il centro della matematica italiana.

7. *La geometria degli iperspazi.*

Quando era studente all'Università di Padova, Levi-Civita aveva avuto Giuseppe Veronese come professore di geometria. Dopo aver studiato alla Scuola Politecnica di Zurigo, Veronese si era laureato a Roma ed era diventato assistente di Cremona. Nel 1880-81 aveva trascorso l'anno accademico a Lipsia per studiare con Klein, che esercitò su di lui «una speciale impressione» e gli «fu largo d'ogni maniera d'indirizzi e di consigli», come riconosceva lo stesso Veronese. Al termine di quel soggiorno, nel 1882 pubblicò nei «Mathematische Annalen» diretti da Klein una memoria che, come ebbe a dire Corrado Segre (1863-1924), fece epoca nella storia della geometria proiettiva degli spazi di dimensione superiore.

L'idea fondamentale di quella memoria, e dell'intera opera di Veronese nella geometria degli iperspazi, era che certe configurazioni di punti dello spazio ordinario si possono ottenere mediante opportune proiezioni e sezioni di configurazioni di punti di un iperspazio qualunque. Egli applicava questa idea allo studio dell'«esagramma mistico» di Pascal e di quadriche a *n* dimensioni e, due anni dopo, allo studio delle proprietà di una particolare superficie dello spazio a cinque dimensioni che oggi porta il suo nome.

Cosa si deve intendere per uno spazio a *n* dimensioni? Per rispondere Veronese faceva appello all'intuizione. Ragionando in analogia con le usuali costruzioni del piano e dello spazio proiettivo ordinario, egli sosteneva una concezione «genetica» degli iperspazi. Come lo spazio a tre dimensioni si può pensare generato da un piano e un punto fuori di esso, cosí lo spazio a quattro dimensioni si può pensare generato dallo spazio tridimensionale e da un punto fuori di esso, e cosí via per spazi di dimensione superiore, arbitrariamente grande.

«Con la memoria di Veronese», commentava Segre [1917, p. 478], «si può dire che la geometria proiettiva di questi spazi è per la prima volta organizzata e svolta sistematicamente, come scienza geometrica, e non come una specie di analisi travestita». Lo stesso Veronese nella memoria sulla superficie omonima affermava che non si trattava di rivestire i risultati dell'analisi con un linguaggio sintetico, ma al contrario di applicare semmai il metodo analitico alle costruzioni geometriche. A questo principio si ispirano anche i *Fondamenti di geometria a piú dimensioni* (1891), un volume ben presto tradotto in tedesco, che rese universalmente noto il suo nome. Nella lunga introduzione e nell'appendice al volume Veronese discuteva questioni di carattere generale e metodologico, compresa la possibilità di «stabilire una geometria assoluta, indipendente dall'assioma di Archimede» che, all'epoca, incontrò non poche opposizioni.

Facendo implicito riferimento a Veronese anche Segre, allievo di D'Ovidio a Torino, aveva adottato lo stesso punto di vista fin dalla sua tesi di laurea nel 1883. Tuttavia, mentre Veronese affermava nei suoi articoli, e nei *Fondamenti*, di considerare i punti di un iperspazio «tali e quali» i punti dello spazio ordinario, secondo Segre «la natura intima» dei punti di un iperspazio rimaneva «indeterminata». Del resto, aggiungeva Segre, «la mancanza di una rappresentazione pei nostri sensi degli enti che [la geometria degli iperspazi] studia non ha molta importanza pel matematico puro». Quello che importa sono gli isomorfismi che si possono stabilire tra spazi lineari a uno stesso numero di dimensioni che, come scrive Segre [1883, p. 46], «qualunque siano i loro elementi si possono riguardare come identici tra loro». Questo era l'atteggiamento piú fecondo per il geometra.

Piú esplicita e diretta era la critica di Peano, che in una recensione dei *Fondamenti* denunciava l'assurdità logica insita nel principio fondamentale sul quale Veronese basava la sua concezione genetica degli iperspazi. Nei suoi *Principii di geometria logicamente esposti* (1889), in cui presentava un sistema di assiomi per la geometria elementare, Peano aveva mostrato che per passare da due a tre dimensioni occorre un opportuno assioma (e analogamente accade per le dimensioni superiori). Altrettanto diretta era la (infelice) polemica di Peano sull'impossibilità di esistenza di segmenti infinitesimi, nella quale intervennero tra gli altri anche Levi-Civita e il creatore della teoria degli insiemi, Georg Cantor. Una polemica che aveva come obiettivo la geometria non archimedea di Veronese, che invece doveva trovare autorevole conferma meno di dieci anni dopo nei lavori di Hilbert.

Il contrasto di punti di vista tra Peano e Segre (e Veronese) veniva alla luce con la pubblicazione nel primo numero della «Rivista di matematica», fondata da Peano, di alcune considerazioni sulle ricerche geometriche recenti che Segre indirizzava ai suoi studenti. «Accade tuttora, anche in Italia, che non si sappia collocare la geometria ad *n* dimensioni al suo giusto posto», esordiva Segre. C'era chi privilegiava l'aspetto algebrico, riducendo la geometria degli iperspazi all'algebra delle trasformazioni lineari. Chi suggeriva di considerare come punti di uno spazio a piú dimensioni i punti dello spazio ordinario, pensati dipendenti da un numero qualsiasi di parametri. E infine, c'era il punto di vista proposto da Veronese. Tutte queste distinzioni non avevano per Segre grande importanza. Quando si tratta di «scoprire la verità», affermava Segre, la «purezza del metodo» passa in secondo piano, e talvolta anche il rigore.

La nota di Segre provocava l'immediata e pungente risposta di Peano, che rivendicava l'esigenza di un rigore assoluto per la matematica che, a suo dire, non è altro che «una logica perfezionata». Le diverse concezioni dei due sul ruolo del rigore sono evidenti, meno evidente è la sostanza matematica che è in discussione: come lavorare negli iperspazi? Pur senza condividere l'ontologia di Veronese, Segre ha in mente il metodo sintetico delle proiezioni (e delle sezioni), che egli applica con successo nei suoi lavori. E per l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* scrive il lungo saggio di oltre 200 pagine *Mehrdimensionale Räume* sulla geometria a piú dimensioni, uno scritto di rara chiarezza ed eleganza che raccoglie quanto era noto all'epoca sull'argomento.

Per Peano, invece, gli iperspazi non sono altro che varietà ad *n* dimensioni, da studiare con le tecniche dell'algebra lineare. In fondo, si tratta dell'atteggiamento che sarà fatto proprio da Bertini nel volume *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (1907), che sarà a lungo il testo di riferimento. Allievo di Cremona a Bologna poi di Betti e Dini a Pisa, dopo la laurea nel 1867 Bertini trascorre diversi anni come insegnante nei licei di Milano e di Roma dove, su proposta di Cremona, è anche incaricato di un corso all'università. Nel 1875 vince il concorso per una cattedra di geometria a Pisa, dove insegna per il resto della sua vita tranne un periodo di 12 anni, dal 1880 al 1892, trascorsi a Pavia. Bertini continuò sulle orme di Cremona con ricerche sulla classificazione delle involuzioni piane che misero in luce l'importanza delle proprietà invarianti per trasformazioni cremoniane. Due suoi fondamentali teoremi, sui punti singolari variabili e sui sistemi lineari riducibili, pubblicati nel 1882, sono ancora oggi citati nella letteratura della geometria algebrica [Kleiman 1998].

Quando Bertini pubblica l'*Introduzione* la polemica sulla natura degli iperspazi sembra ormai appartenere a un passato remoto, ed egli si limita ad affermare che la geometria degli iperspazi «è semplice interpretazione di nozioni e teoremi algebrici», affidando a una breve nota l'osservazione che la nozione di spazio a piú dimensioni può essere presentata in maniera sintetica con un opportuno sistema di postulati, come appunto avevano fatto Veronese e altri dopo di lui.

9. *La «scuola italiana» di geometria algebrica.*

«Per Veronese, per Segre, per Bertini, per tutti i nostri maestri insomma di geometria iperspaziale, punti, rette, piani di un S_n lineare, sono vere entità geometriche. Lo spazio lineare ad *n* dimensioni per loro è *come se* realmente esistesse». Cosí scriveva Francesco Severi (1879-1961) ricordando la figura di Segre, di cui era stato allievo. In questo modo, continuava Severi, furono studiati enti geometrici (curve, superfici, configurazioni) dello spazio ordinario generati per proiezione da un iperspazio, e «nacque l'idea (che fu pure di Brill e Noether) di ridurre allo studio di modelli proiettivi lo studio delle proprietà delle figure invarianti per trasformazioni birazionali» [Severi 1957, p. VIII].

L'intrecciarsi di ricerche sulle trasformazioni birazionali e sulla geometria degli iperspazi diede origine al tumultuoso sviluppo di studi geometrici che portò i geometri italiani a primeggiare in Europa. Di quello sviluppo Segre fu uno dei protagonisti, un vero e proprio caposcuola di una generazione di geometri che comprendeva molti degli esponenti piú prestigiosi della geometria algebrica italiana, da Guido Castenuovo a Federigo Enriques, da Gino Fano a Francesco Severi a Beppo Levi. Anche se coi suoi lavori diede contributi fondamentali alla geometria enumerativa e alla geometria proiettivo-differenziale, fu soprattutto in geometria algebrica che l'opera di Segre esercitò l'influenza piú profonda.

Egli si era laureato a vent'anni con D'Ovidio, e dal 1888 era professore di geometria superiore a Torino. Nei suoi primi lavori sulle curve e le superfici algebriche rigate in spazi di dimensione superiore aveva affrontato con procedimenti sintetici problemi relativi a proprietà invarianti per trasformazioni birazionali. In quelle ricerche, ricordava Segre nell'*Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (1894), avendo bisogno delle proprietà delle serie lineari, studiate da Brill e Noether con metodi algebrici, «m'accorsi come [...] rappresentando quelle serie lineari mediante curve iperspaziali si potessero ritrovare (almeno in parte) quelle proprietà mediante semplici ragionamenti geometrici, evitando i calcoli algebrici e le considerazioni funzionali» [Segre 1894, p. 199].

Questa grande memoria di Segre, in cui la geometria delle serie lineari sopra una curva è esposta col metodo iperspaziale, rappresenta un esempio paradigmatico delle concezioni della «scuola italiana» di geometria, che privilegia il punto di vista puramente geometrico e sintetico rispetto ai calcoli algebrici della scuola di Brill e Noether o ai metodi trascendenti di Poincaré e Picard. Con gli stessi metodi di geometria proiettiva iperspaziale Segre aveva introdotto nel 1887 il concetto fondamentale di serie caratteristica di un sistema lineare di curve piane e, in seguito, la varietà (che oggi porta il suo nome) dei gruppi finiti di punti presi da altrettanti spazi lineari di dimensione arbitraria e l'invariante di Zeuthen-Segre per le superfici, cosí chiamato perché si trova, se pur in forma diversa, in un articolo di Zeuthen del 1871.

La memoria di Segre del 1894 raccoglieva anche risultati sulle curve ellittiche ed estesi poi alle curve algebriche in generale da Guido Castelnuovo (1865-1952). Laureatosi con Veronese a Padova nel 1886, l'anno seguente Castelnuovo aveva ottenuto un posto di assistente di D'Ovidio a Torino, dove aveva stretto un rapporto di profonda amicizia con Segre, che si mantenne inalterato anche dopo che Castelnuovo si trasferí a Roma nel 1891, dove aveva vinto un concorso a cattedra e svolse la sua lunga carriera scientifica e didattica.

Sotto l'influenza di Segre, a Torino Castelnuovo si dedicò allo studio della geometria algebrica su una curva e, nelle *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (1891), presentò una trattazione geometrica, completa e sistematica, delle serie lineari sopra una curva algebrica. Con quella memoria egli apriva anche la via a un nuovo capitolo della geometria algebrica, quello dello studio delle superfici algebriche secondo l'indirizzo geometrico. Secondo lo stesso Castelnuovo, «il principale interesse della memoria sta nell'aver suggerito concetti, metodi e problemi che si sono dimostrati fecondi nella geometria sopra una superficie algebrica». Tra questi egli ricordava «la distinzione tra caratteri effettivi e virtuali, l'impiego sistematico della serie caratteristica di un sistema di curve, del sistema aggiunto». Tutto ciò si trova nella prima memoria organica sulle superfici, le *Ricerche di geometria sulle superfici algebriche* che Enriques scrisse nel 1893, a soli 22 anni.

La figura di Federigo Enriques (1871-1947) domina nel panorama della matematica e della cultura italiana tra la fine dell'Ottocento e i primi decenni del nuovo secolo. Completati gli studi alla Normale di Pisa, aveva ottenuto un posto di perfezionamento di un anno, per studiare a Roma con Cremona. Invece, nella capitale conobbe Castelnuovo, che ben presto divenne l'amico e l'interlocutore piú fidato e, in «interminabili passeggiate per le vie di Roma», gli fece conoscere i risultati della scuola italiana nel campo delle curve algebriche. Enriques cominciò allora ad affrontare la geometria sopra una superficie algebrica. «Egli mi teneva quotidianamente al corrente dei progressi delle sue ricerche, che io sottoponevo a una critica severa», ricordava molti anni dopo Castelnuovo [1947, p. 5]. «Non è esagerato affermare che in quelle conversazioni fu costruita la teoria delle superficie algebriche secondo l'indirizzo italiano».

La consuetudine quasi quotidiana di rapporti tra i due giovani matematici si mantenne attraverso un fittissimo carteggio scientifico anche dopo che Enriques cominciò, nel 1894, la sua attività di insegnamento all'Università di Bologna, dove trascorse il periodo piú fecondo della sua attività matematica prima di trasferirsi a Roma nel 1922. Di quella corrispondenza sono rimaste poco meno di 700 lettere di Enriques a Castelnuovo[9], un documento straordinario di una collaborazione forse senza uguali nella storia della matematica.

In due grandi memorie, le *Ricerche* del 1893 e l'*Introduzione alla geometria sopra le superficie* (1896), Enriques pone le basi della teoria delle superfici algebriche e della loro classificazione rispetto a caratteri invarianti per trasformazioni birazionali, i generi. Da parte sua, nello stesso anno Castelnuovo dimostra il teorema di Riemann-Roch per le superfici e determina il fondamentale criterio di razionalità di una superficie. Nel corso di queste ricerche Enriques suggerisce a Castelnuovo il controesempio di superficie che porta il suo nome, una sestica che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro.

Nel 1906, quando la classificazione delle superfici algebriche è nella sostanza compiuta, Castelnuovo interrompe la sua attività di ricerca in geometria, e si dedica prima a problemi dell'insegnamento matematico e poi, nel dopoguerra, a un campo per lui completamente nuovo, la teoria della probabilità. I risultati delle loro ricerche geometriche saranno raccolti in maniera sistematica da Enriques e Castelnuovo in due grandi memorie apparse nel 1914 nell'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* L'anno seguente esce il primo dei quattro volumi delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (1915-34) di Enriques, curate dall'allievo Oscar Chisini (1889-1967), che offrivano una trattazione sistematica della geometria algebrica secondo la «scuola» italiana.

[9] Cfr. Bottazzini, Conte e Gario [1996; 2004].

A quella scuola apparteneva anche Gino Fano (1871-1952), dal 1894 assistente di Castelnuovo a Roma. Fano era stato un allievo di Segre; nel 1890 aveva trascorso un periodo di studio con Klein a Gottinga e, su proposta di Segre, ne aveva curato la traduzione italiana del *Programma di Erlangen*, che segnò l'inizio della sua effettiva circolazione negli ambienti matematici europei. Raccogliendo l'invito di Segre contenuto nelle *Osservazioni ai suoi studenti* (1891), Fano pubblicò nel 1892 un articolo in cui presentava una trattazione assiomatica della geometria proiettiva degli iperspazi. Per dimostrare l'indipendenza dei postulati introdotti, in quel lavoro Fano si serviva di esempi divenuti celebri – come il piano di 7 punti e 7 rette che, proiettato da un punto esterno dà luogo a una configurazione di 15 punti, 15 piani e 35 rette – che segnavano l'inizio di un nuovo capitolo della geometria, quello delle geometrie finite. Lo stesso Fano, dal 1901 professore a Torino, si affermerà per i suoi lavori sulle varietà algebriche tridimensionali, oltre che per gli studi di geometria non euclidea e non archimedea.

Quando la collaborazione scientifica con Castelnuovo stava per concludersi, Enriques aveva trovato un altro interlocutore di genio in Severi, che si era laureato a Torino con Segre nel 1900, e poi nel 1902-03 era stato assistente di Enriques. La loro collaborazione culminò nel 1907 in una memoria sulle superficie iperellittiche che vinse il prestigioso Prix Bordin dell'Académie des sciences di Parigi. Due anni piú tardi, lo stesso premio per un argomento del tutto analogo fu riconosciuto ai due geometri siciliani Giuseppe Bagnera (1865-1927) e Michele De Franchis (1875-1946), autori di una memoria che completava i risultati di Enriques e Severi.

Dal 1905 Severi aveva vinto un concorso a cattedra e insegnava geometria a Padova, dove rimase fino al 1922, quando si trasferí a Roma. Con Castelnuovo ed Enriques, fu uno dei maestri della scuola geometrica italiana e, negli anni tra le due guerre, in sintonia con la politica del tempo, si affermò come il «duce» della matematica nel nostro paese.

9. *Logica e fondamenti della geometria.*

Com'era accaduto nel 1884 per il corso di calcolo differenziale e integrale, ancora in sostituzione di Genocchi dal 1885 al 1887 Peano insegnò applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Nell'omonimo volume che raccoglie quelle lezioni, introducendo le operazioni sui segmenti orientati Peano faceva riferimento alla teoria delle equipollenze di Bellavitis, e ai lavori di Möbius, Hamilton e Grassmann. Nel linguaggio delle equipollenze e dei vettori le *Applicazioni geometriche* (1887) di Peano offrono una sistematica trattazione di concetti fondamentali della geometria infinitesimale come limiti e derivate di vettori, tangente e normale a una curva piana e nello spazio, piano osculatore di una curva, curvatura e inviluppi di superfici, oltre a elementi di sicura originalità, come una nuova definizione di area e di volume (la cosiddetta misura di Peano-Jordan).

L'anno seguente Peano pubblicò il *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*. Il calcolo geometrico, spiegava Peano, consiste in un sistema di operazioni, analoghe a quelle algebriche, eseguite però su enti geometrici. Quel volume, che contribuiva a rendere familiari al pubblico matematico italiano le idee di Grassmann, rappresenta una svolta nell'attività scientifica di Peano. Le *Operazioni di logica deduttiva*, premesse al volume, davano infatti una presentazione assiomatica dell'algebra della logica, e stavano a indicare che gli interessi di Peano si stavano orientando verso la logica, una parte della matematica, a suo dire, «finora non molto progredita».

Continuando queste ricerche, come ricordava qualche anno piú tardi negli *Arithmetices principa nova methodo exposita* (1899), «fui fortunato ad arrivare ad un'analisi completa delle idee di logica, riducendole ad un numero assai limitato». In quel breve scritto Peano introduceva tra l'altro i celebri assiomi per i numeri naturali che portano il suo nome. A distanza di pochi mesi, agli *Arithmetices principia* facevano seguito i *Principii di geometria* (1899), entrambi saggi dell'efficacia del simbolismo logico che il matematico torinese andava elaborando. Il grande sogno di Leibniz di una lingua universale simbolica si stava realizzando, egli scriveva nel 1894 nell'opuscolo *Notation de logique mathématique* pubblicato come introduzione al *Formulaire de mathématiques*. Negli ultimi anni, affermava Peano, si era pervenuti al risultato decisivo di esprimere in simboli, «con combinazioni di segni di algebra e di logica», proposizioni sempre piú lunghe e complete.

Prendeva corpo cosí il *Formulario di matematica*, il progetto enciclopedico di raccogliere in maniera sistematica tutti gli enunciati e i teoremi di matematica (scritti nel simbolismo peaniano). All'impresa erano chiamati allievi e collaboratori, il gruppo di logici e matematici che costituí la «scuola» di Peano. Elementi di spicco ne erano Giovanni Vailati (1863-1909), Giulio Vivanti (1859-1949), Cesare Burali-Forti (1861-1931), Alessandro Padoa (1886-1937) e Mario Pieri (1866-1913). «Si vuole studiare un argomento qualunque? Si apra il formulario al posto opportuno e si troveranno in poche pagine tutte le verità conosciute su quell'argomento». Cosí affermava Peano. Di fatto, tuttavia, nel *Formulario* potevano essere raccolte teorie «mature», come l'aritmetica o la geometria elementare, la teoria dei vettori o l'analisi reale, nella forma rigorosa e «aritmetizzata» raggiunta alla fine del secolo. Non certo le piú recenti teorie algebriche o geometriche, ancora in fase di impetuoso e disordinato sviluppo o le delicate questioni che si incontrano nella teoria degli insiemi.

Del *Formulario* Peano curò cinque edizioni, frutto di successive revisioni e aggiunte. L'ultima apparve nel 1908, scritta in *latino sine flexione*, la lingua internazionale creata dallo stesso Peano che, dall'inizio del secolo, si

19-bottazzini.indd 28 15-06-2007 19:59:11

era dedicato con crescente interesse al problema, allora di grande attualità, dei linguaggi della comunicazione scientifica. Adottato nell'Academia pro interlingua, fondata e presieduta dal logico torinese, il *latino sine flexione*, insieme al peculiare simbolismo peaniano, finí per caratterizzare una «scuola» destinata al progressivo isolamento all'interno della comunità scientifica, e alla definitiva scomparsa con la morte del suo fondatore.

Nell'ultima edizione del *Formulario* alla logica erano dedicate una quindicina di pagine. Del resto, scriverà Peano (in *latino sine flexione*) nella recensione ai *Principia mathematica* di Russell e Whitehead, la logica matematica non è altro che uno strumento per esprimere le proposizioni della matematica ordinaria. Basta un'ora di studio per conoscere quanto serve allo scopo. Cosí, il logico che aveva avuto un ruolo pionieristico nella nascita della logica moderna e aveva esercitato un'enorme influenza sullo stesso Russell, finiva per dichiararsi estraneo allo straordinario sviluppo, alimentato dalla «crisi dei fondamenti», che la logica stava conoscendo nei primi decenni del secolo.

Uno degli interpreti piú originali delle idee di Peano fu Mario Pieri. Dopo gli studi alla Normale di Pisa, Pieri ottenne un posto di insegnamento all'Accademia militare di Torino e, nel 1900, una cattedra di geometria all'Università di Catania da dove poi si trasferí a Parma. Quando Pieri, sotto l'influenza di Peano, comincia a orientarsi verso lo studio dei fondamenti della geometria, può già vantare una trentina di lavori di geometria algebrica. In tre successive note, pubblicate tra il 1894 e il 1895, Pieri presenta, nel linguaggio della «nuova Arte Logica» di Peano, un sistema di postulati per la geometria proiettiva, intesa come «una scienza deduttiva indipendente da ogni altro corpo di dottrine matematiche o fisiche».

Nel 1996, adottando lo stesso punto di vista «puramente deduttivo e astratto» Pieri affronta il problema della trattazione assiomatica della geometria proiettiva negli iperspazi, ancora «oggetto di controversia per molti», presentando un sistema di postulati che, insieme agli assiomi della logica, sono sufficienti «a sostenere l'intero edifizio della geometria proiettiva astratta». L'anno seguente raccoglie i risultati delle sue ricerche «in un tutto piú coerente ed organico», che per rendere accessibile a un pubblico piú ampio espone attenendosi «alle consuete forme del dire», cioè il linguaggio naturale in luogo del simbolismo peaniano. Infine, nell'aprile 1899 Pieri pubblica una monografia diventata celebre. Si tratta di una «monografia del punto e del moto», che non ha piú per oggetto la geometria proiettiva ma la geometria elementare, costruita appunto a partire dalle idee primitive di «punto» e moto».

Le ricerche di Pieri sui fondamenti della geometria proiettiva si intrecciano con quelle di Enriques, che culminano nelle sue *Lezioni di geometria proiettiva* (1898) e nell'articolo sui *Prinzipien der Geometrie*, scritto per l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. La geometria, afferma

Enriques nelle *Lezioni*, studia il concetto di spazio «senza porsi il problema (psicologico ma non matematico) della sua genesi». Tale problema si presenta tuttavia nella scelta degli «elementi fondamentali» (punto, retta e piano), scelta che per Enriques è dettata dal criterio di semplicità rispetto all'intuizione psicologica. Mentre Peano e Pieri ritengono che i postulati debbano essere in minor numero possibile, tale criterio secondo Enriques «non ha valore imperativo e non soddisfa sempre il senso psicologico dell'intuizione». Quest'ultimo infatti, prima ancora che l'astrattezza o il rigore, è a suo parere il criterio che deve orientare la ricerca nelle questioni dei fondamenti, e la scelta degli elementi fondamentali deve cadere su quelli che hanno «maggior evidenza intuitiva». Anche l'articolo per l'*Enzyklopädie* è ispirato a una «filosofia» diametralmente opposta alle vedute di Pieri (e di Hilbert), responsabili di aver messo l'intuizione geometrica in secondo piano, intendendo «l'arbitrarietà degli assiomi nel senso piú ampio» o limitandosi ad «approfondire alcune questioni logico-formali».

Nel 1907, quando quell'articolo appare finalmente a stampa, Enriques è ormai da tempo impegnato sul terreno filosofico, nella convinzione che «la filosofia debba essere fatta da spiriti scientifici, ed *in servigio della scienza*», come scrive a Vailati nel 1901. Nel primo decennio del secolo l'attività di Enriques in questo campo è frenetica. Nel 1906 pubblica *I problemi della scienza.* Viene eletto presidente della Società filosofica, dà vita alla «Rivista di scienza» (1907), pubblica articoli e volumi in cui presenta la propria filosofia scientifica, organizza congressi nazionali e internazionali, come quello di Bologna del 1911, occasione della celebre polemica con Croce che segna la sconfitta della prospettiva filosofica di Enriques di fronte all'idealismo di Croce e Gentile. È una sconfitta emblematica. Alla vigilia della Grande guerra anche per la matematica italiana si sta chiudendo un'epoca. Con la scomparsa dei matematici della generazione risorgimentale è venuto meno l'impegno sul terreno politico istituzionale, con la sola, significativa, eccezione di Volterra. Su sua proposta, si tiene a Roma (1908) il Congresso internazionale dei matematici che, dopo i Congressi di Parigi (1900) e di Heidelberg (1904), sancisce la preminenza dell'Italia in campo matematico, accanto alla Francia e alla Germania. E tuttavia le «scuole» matematiche – dall'analisi alla logica alla geometria – che avevano caratterizzato il grande sviluppo della matematica italiana sembrano progressivamente smarrire vigore e creatività. Con la morte di Guccia nel 1914 si conclude anche il periodo migliore della storia del Circolo matematico di Palermo, quello in cui i suoi «Rendiconti» erano diventati la piú importante rivista internazionale di matematica. Dopo la Grande guerra, il panorama politico europeo è profondamente cambiato, e anche per la matematica inizia una stagione nuova.

BERZOLARI, L.

1906 *Commemorazione di Luigi Cremona*, in «Rendiconti dell'Istituto Lombardo», (2)39, pp. 95-155.

BORTOLOTTI, E.

1953 *Introduzione ai lavori geometrici di Ulisse Dini*, in U. DINI, *Opere*, Cremonese, Roma, vol. I, pp. 195-209.

BOTTAZZINI, U.

1990 *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica*, Utet, Torino, 2a ed. 2003.

1994 *Va' pensiero. Immagini della matematica nell'Italia dell'Ottocento*, il Mulino, Bologna.

1998 *Francesco Brioschi e la cultura scientifica nell'Italia post-unitaria*, in «Bollettino dell'Unione matematica italiana», (8)1-A, pp. 59-78.

2001 *I geometri italiani e il problema dei fondamenti (1889-1899)*, in «Bollettino dell'Unione matematica italiana», (8)4-A, pp. 281-329.

BOTTAZZINI, U., CONTE, A. e GARIO, P. (a cura di)

1996 *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Bollati Boringhieri, Torino.

BRIGAGLIA, A. e MASOTTO, G.

1982 *Il circolo matematico di Palermo*, Laterza, Bari.

CAPECCHI, D., RUTA, G. e TAZZIOLI, R.

2006 *Enrico Betti: Teoria dell'elasticità*, Hevelius, Benevento.

CASTELNUOVO, G.

1947 *Commemorazione del Socio Federigo Enriques*, in «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei», (8)2, pp. 3-21.

DINI, U.

1878 *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale*, Nistri, Pisa, ristampa Firenze 1990.

HADAMARD, J.

1968 *Œuvres complètes*, vol. III, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

KLEIMAN, S.

1998 *Bertini and his two fundamental theorems*, in «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», (2) suppl. n. 55, pp. 9-37.

LORIA, G.

1901 *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*, in «Biblioteca matematica», (3)2, pp. 392-440.

1904 *Luigi Cremona et son œuvre mathématique*, in «Biblioteca matematica», (3)5, pp. 125-95.

NOETHER, M.

1904 *Luigi Cremona*, in «Mathematische Annalen», 59, pp. 1-19.

PEANO, G.

1959 *Opere scelte*, 3 voll., Cremonese, Roma.

SEGRE, C.

1883 ?????????????

1894 *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, ????????

1917 *Commemorazione del socio nazionale Giuseppe Veronese*, in ID., *Opere*, vol. IV, Cremonese, Roma 1963, pp. 474-86.

SEVERI, F.

1957 *Prefazione*, in C. SEGRE, *Opere*, vol. I, Cremonese, Roma 1957, pp. V-XII.

TAZZIOLI, R.

2000 *Beltrami e i matematici relativisti. La meccanica in spazi curvi nella seconda metà dell'Ottocento*, «Quaderni dell'Unione matematica italiana» n. 47, Bologna.