

Le competenze matematiche

Le prove di valutazione nazionali e internazionali

Quali stimoli per gli insegnanti di matematica?

Aurelia Orlandoni

E-mail: aurelia.orlandoni@libero.it

Potenza 9 marzo 2010

Le competenze matematiche

Le prove di valutazione nazionali e internazionali

- 1. Caratteristiche delle rilevazioni internazionali:
TIMMS e PISA**
- 2. Qualche risultato**
- 3. Alcuni problemi italiani**
- 4. I commenti degli studenti (Stefania Pozio)**
- 5. La valutazione nazionale esterna**
- 6. Analisi e commenti alle prove**
- 7. Quali spunti didattici?**

OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico)

PISA (Program for International Student Assessment)

TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study)

1. TIMMS

è promossa, come l'indagine PIRLS, dall'International Association for the Evaluation of Educational

Achievement - IEA (associazione di Enti di ricerca non governativi)

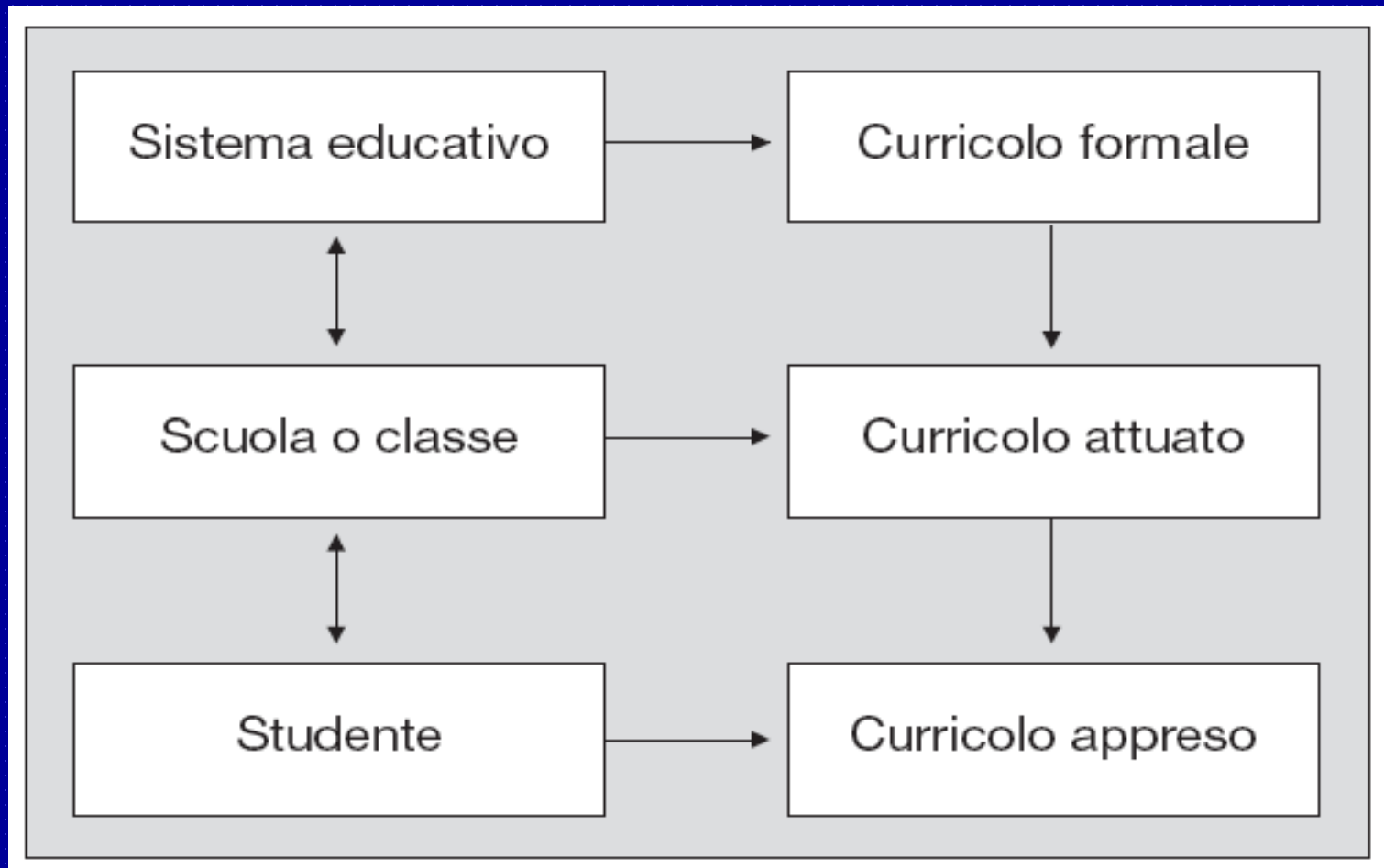
- Il curriculum è il principale criterio di riferimento e ha un quadro di riferimento strettamente aderente alla effettiva pratica scolastica
- Rilevazioni periodiche (ogni 4 anni) degli apprendimenti degli studenti al IV e VIII anno di scolarità (IV elementare e III media)
- il primo ciclo è stato nel 1995 (41 paesi) e l'ultimo nel 2007 (60 paesi).
- Nel 2008 Advanced: ultimo anno di scuola superiore



IEA-TIMSS

*Trends in International
Mathematics and Science Study*

1. TIMMS



1. TIMMS

Domini di contenuto



| IV primaria | III secondaria |
|--|--|
| Numero numeri naturali, frazioni e decimali, espressioni numeriche, sequenze e relazioni | Numero numeri naturali, frazioni e decimali, numeri interi, rapporto, proporzione e percentuale |
| | Algebra Sequenze, espressioni algebriche, equazioni/formule e funzioni |
| Figure geometriche e misure rette e angoli, solidi e figure piane, posizione e movimento | Geometria Figure geometriche, misure geometriche, posizione e movimento |
| Visualizzazione dati lettura e interpretazione, organizzazione e rappresentazione dei dati | Dati e probabilità organizzazione e rappresentazione dei dati, interpretazione dei dati, probabilità |

1. TIMMS



Processi/abilità cognitive

- **conoscenza**: riguarda i fatti, le procedure e i concetti che gli studenti devono conoscere
- **applicazione**: è incentrato sull'abilità degli studenti di applicare nozioni e conoscenze concettuali per risolvere problemi o rispondere a quesiti
- **ragionamento**: va oltre la soluzione di problemi di routine per includere situazioni non familiari, contesti complessi e problemi che richiedono una soluzione in più fasi.

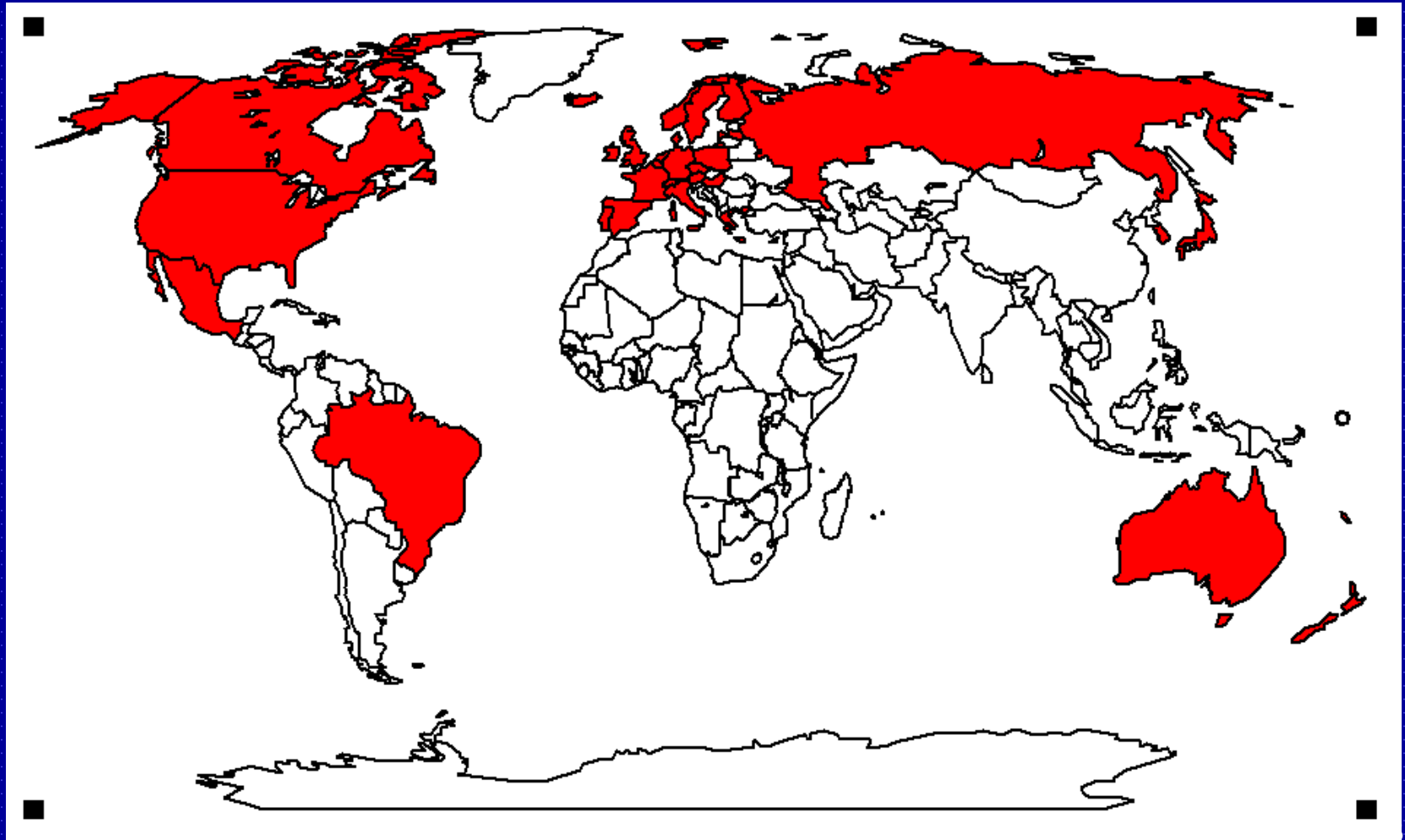
1. Caratteristiche di PISA



- Ricerca Internazionale sui sistemi scolastici (nel 2006 400.000 studenti di 57 Paesi)
- **Lettura**, **matematica** e scienze
- periodicità **triennale** (ogni volta focus su una competenza: **2000**, **2003**, 2006, **2009**)
- studenti **quindicenni** (età!!)
- **competenze essenziali** per l'esercizio della **cittadinanza attiva**

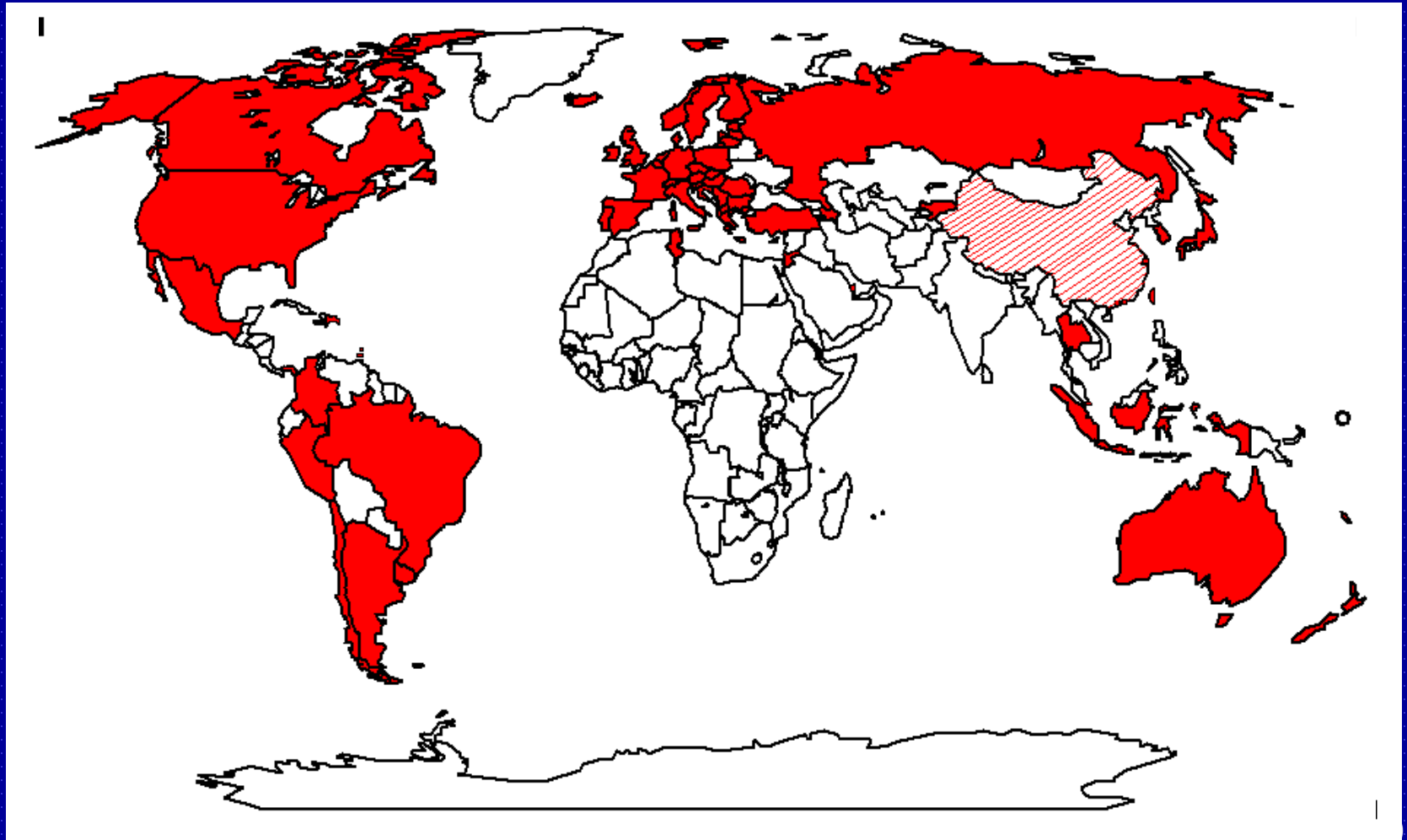
Paesi aderenti al Progetto PISA nel 2000

Equivalenti a 81% dell'economia mondiale



Paesi aderenti al Progetto PISA nel 2009

Equivalenti a 87% dell'economia mondiale



1. Caratteristiche di PISA: obiettivi



- ❖ mettere a punto indicatori relativi agli apprendimenti degli studenti 15enni, comparabili a livello internazionale
(*COMPARAZIONE INTERNAZIONALE*)
- ❖ ottenere informazioni sull'insieme dei fattori che influiscono sulle prestazioni dei quindicenni, per individuare le caratteristiche dei sistemi scolastici più efficaci
(*INDICATORI DI QUALITÀ DEI SISTEMI SCOLASTICI*)
- ❖ fornire informazioni sui risultati dei sistemi di istruzione in modo regolare
(*TREND*)

1. Caratteristiche di PISA: le prove



La prova

- tipologia **mista** di domande:
 - a scelta multipla, a scelta multipla complessa, a risposta univoca,
 - a risposta breve, aperta a risposta articolata (**in genere più del 50%**)
- calcolatrice **consentita**
- NON verifica i curricoli ma competenze: **Competenza matematica (mathematical literacy):** *capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione*

I Questionari:

- Studenti
- Dirigenti scolastici
- Genitori (dal 2006)

1. Caratteristiche di PISA: quale matematica



Domande classificate per **ambiti** (idee chiave):

– **spazio e forma**

(geometria)

– **cambiamento e relazioni**

(algebra)

– **Quantità**

(aritmetica)

– **Incertezza**

(statistica e probabilità)

Aree di contenuto

QUANTITA' (ragionamento quantitativo)

- concetto di numero
- uso di numeri per rappresentare quantità e attributi quantificabili degli oggetti del mondo reale (stime e misure)
- comprensione del significato delle operazioni
- idea dell'ordine di grandezza dei numeri
- calcolo mentale/calcoli eleganti

SPAZIO E FORMA

- riconoscimento di forme e modelli
- comprensione dei cambiamenti dinamici delle forme
- rappresentazioni bi- e tri-dimensionali e loro interrelazioni
- capacità di cogliere somiglianze e differenze tra gli oggetti
- posizioni relative e movimento nello spazio

CAMBIAMENTO E RELAZIONI

- rappresentazione di relazioni matematiche in modi diversi (simboliche, algebriche, grafiche, tabulari)
- saper passare da un tipo di rappresentazione ad un altro
- saper pensare in termini funzionali (sapere cosa sono il tasso di cambiamento, la pendenza ecc.)
- si collega ad aspetti di altre idee chiave (Spazio e forma e Incertezza)

INCERTEZZA

- produzione di dati (metodi validi per misurare determinate caratteristiche; indagine statistica)
- analisi dei dati e loro visualizzazione e rappresentazione grafica; concetto di media e mediana
- probabilità

1. Caratteristiche di PISA: le competenze matematiche

I processi: 8 competenze tipiche (Niss et al., 1999):

- Pensiero e ragionamento
- Argomentazione
- Comunicazione
- Modellizzazione
- Formulazione e risoluzione di problemi
- Rappresentazione
- Uso del linguaggio simbolico
- Uso di sussidi e strumenti

I raggruppamenti (legati ai processi):

- **Riproduzione:** si tratta di ricordare, di riprodurre, di ricollegare oggetti, proprietà e relazioni già note applicando algoritmi e abilità tecniche relativamente semplici e già utilizzate
- **Connessioni:** raccoglie i processi mentali che richiedono un maggior impegno nell'interpretazione, nel passaggio da una rappresentazione all'altra o nel collegamento di diversi aspetti della situazione in esame
- **Riflessione:** raccoglie i processi che si esprimono sotto forma di scoperta o di riflessione sulla propria azione; la riflessione implica la creazione e la scelta della strategia migliore per trovare la soluzione

1. Caratteristiche di PISA: le domande 2003 e 2006

| | Cambiamento e relazioni | Spazio e forma | Quantità | Incertezza | Totale |
|--------------|-------------------------------|----------------------|----------|------------|--------|
| Riproduzione | 7 4 | 5 2 | 9 3 | 5 2 | 26 11 |
| Conessioni | 8 7 | 12 7 | 11 5 | 9 5 | 40 24 |
| Riflessione | 7 2 | 3 2 | 3 5 | 6 4 | 19 13 |
| TOTALE | 22 13 | 20 11 | 23 13 | 20 11 | 85 48 |

1. Caratteristiche di PISA: i livelli di competenza matematica

| | |
|------------------|---|
| Livello 6 | Sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni basate sulla propria analisi e modellizzazione di situazioni problematiche complesse |
| Livello 5 | Sono in grado di sviluppare modelli di situazioni complesse e di servirsene |
| Livello 4 | Sono in grado di servirsi in modo efficace di modelli dati applicandoli a situazioni concrete complesse |
| Livello 3 | Sono in grado di eseguire procedure chiaramente definite, comprese quelle che richiedono decisioni di sequenze |
| Livello 2 | Sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni che richiedano non più di una inferenza diretta |
| Livello 1 | Sono in grado di rispondere a domande che riguardino contesti familiari |

2. Qualche risultato: ... una provocazione

Dal confronto coi nostri curricoli:

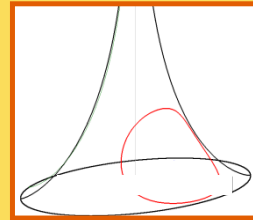
I programmi dagli anni '70

Le Indicazioni

I curricoli UMI

.....

LA MATEMATICA



La matematica
per il cittadino

... ha uno specifico ruolo nello sviluppo della capacità generale di operare e comunicare significati con linguaggi formalizzati e di utilizzare tali linguaggi per rappresentare e costruire modelli di relazioni fra oggetti e situazioni.

**funzione
strumentale**

**funzione
culturale**

In particolare la matematica dà la descrizione logica del mondo e permette di risolvere problemi della vita quotidiana, in quanto contribuisce a sviluppare capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni altrui.

2. Qualche risultato: ... una provocazione

Dal confronto coi nostri curricoli:

**Contenuti più approfonditi, insistenza su
matematizzazione, modelli, laboratorio,...**

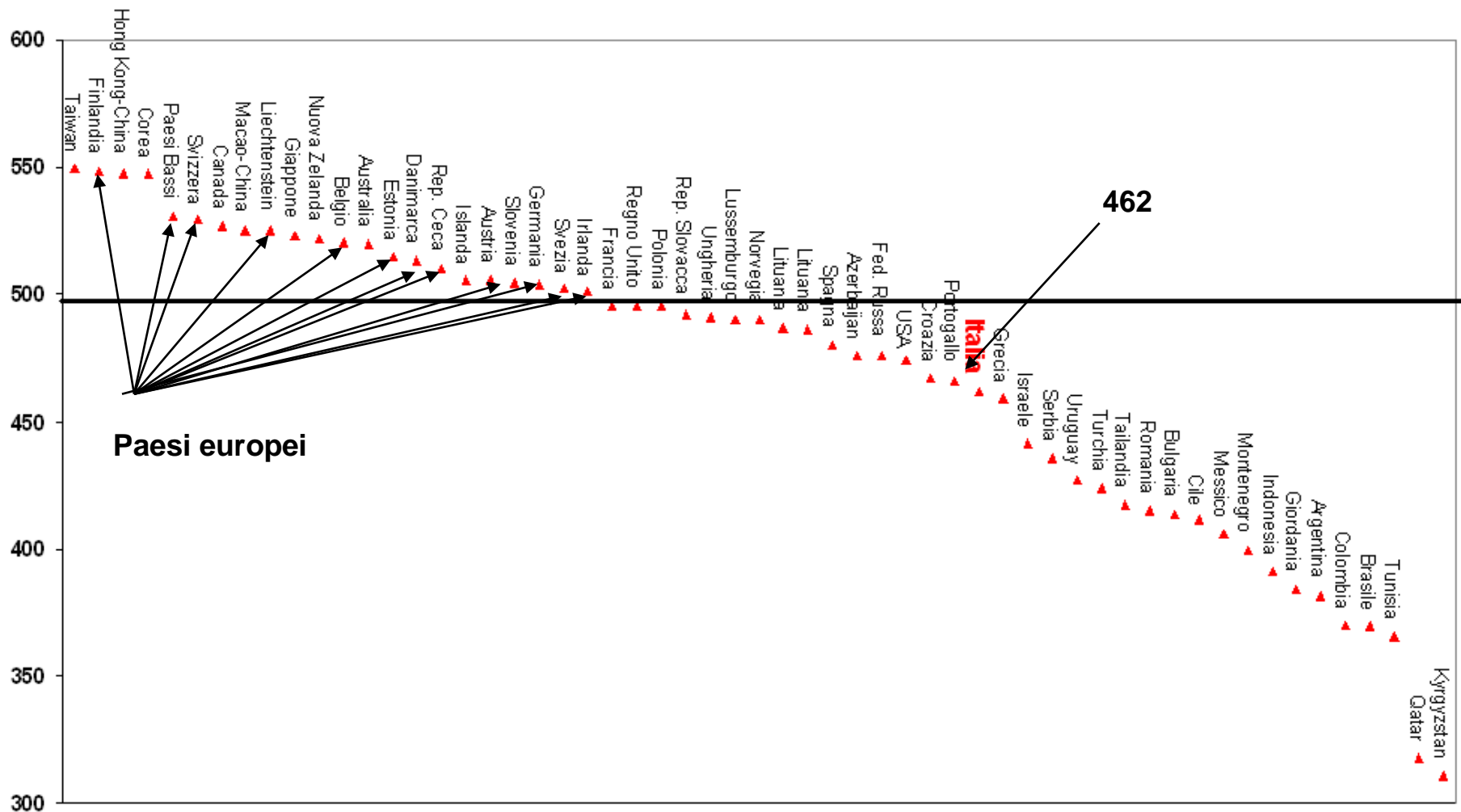
e

**... i nostri alunni sono abituati a verifiche articolate,
complesse e aperte ...**

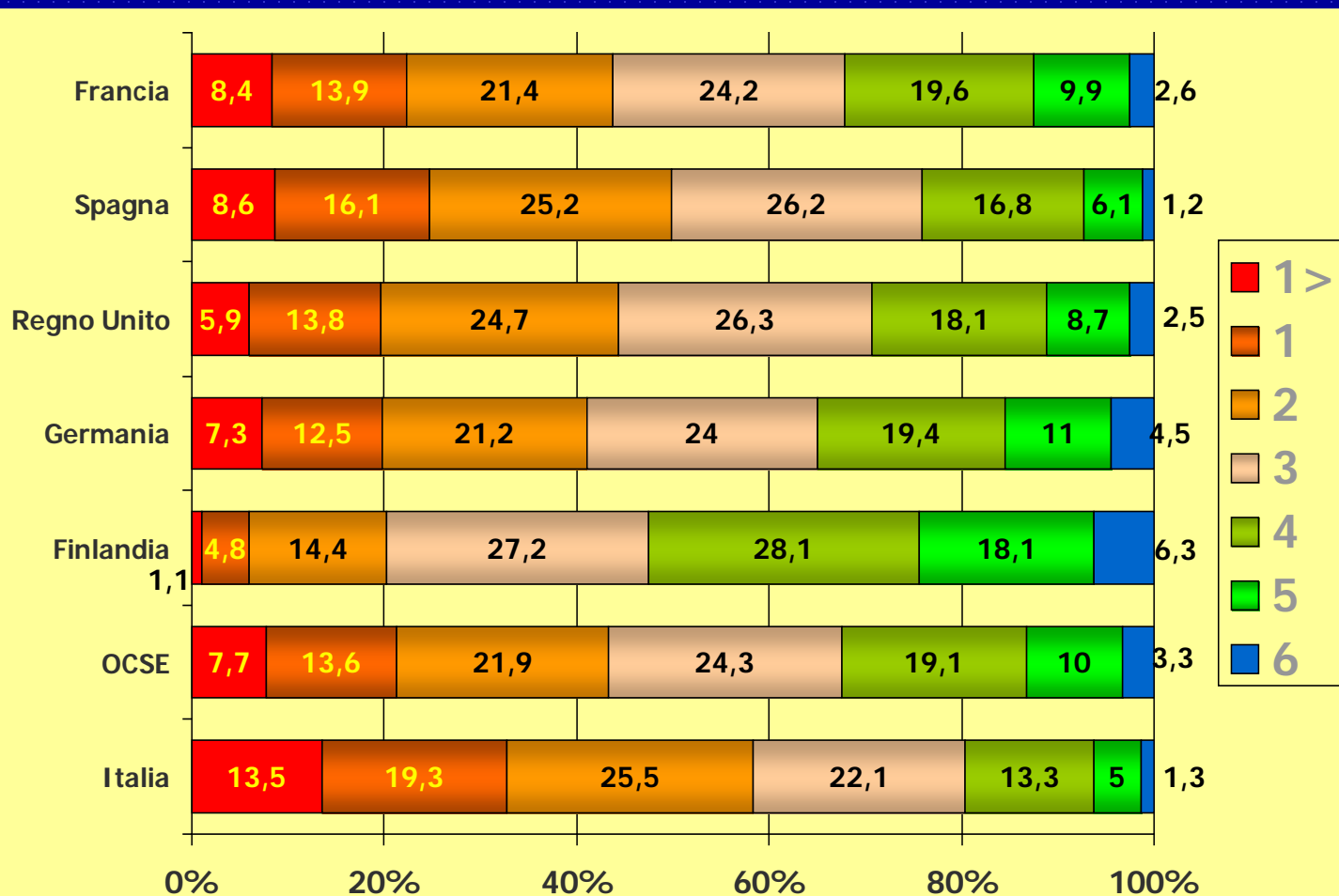
Quindi dovremmo essere i migliori!

2. Qualche risultato: PISA

(media OCSE=498)



2. Qualche risultato: PISA



• Il 32,8% sotto il livello 2 (OCSE 21,3%)

• Il 6,3% livello 5 e 6 (OCSE 13,3%)

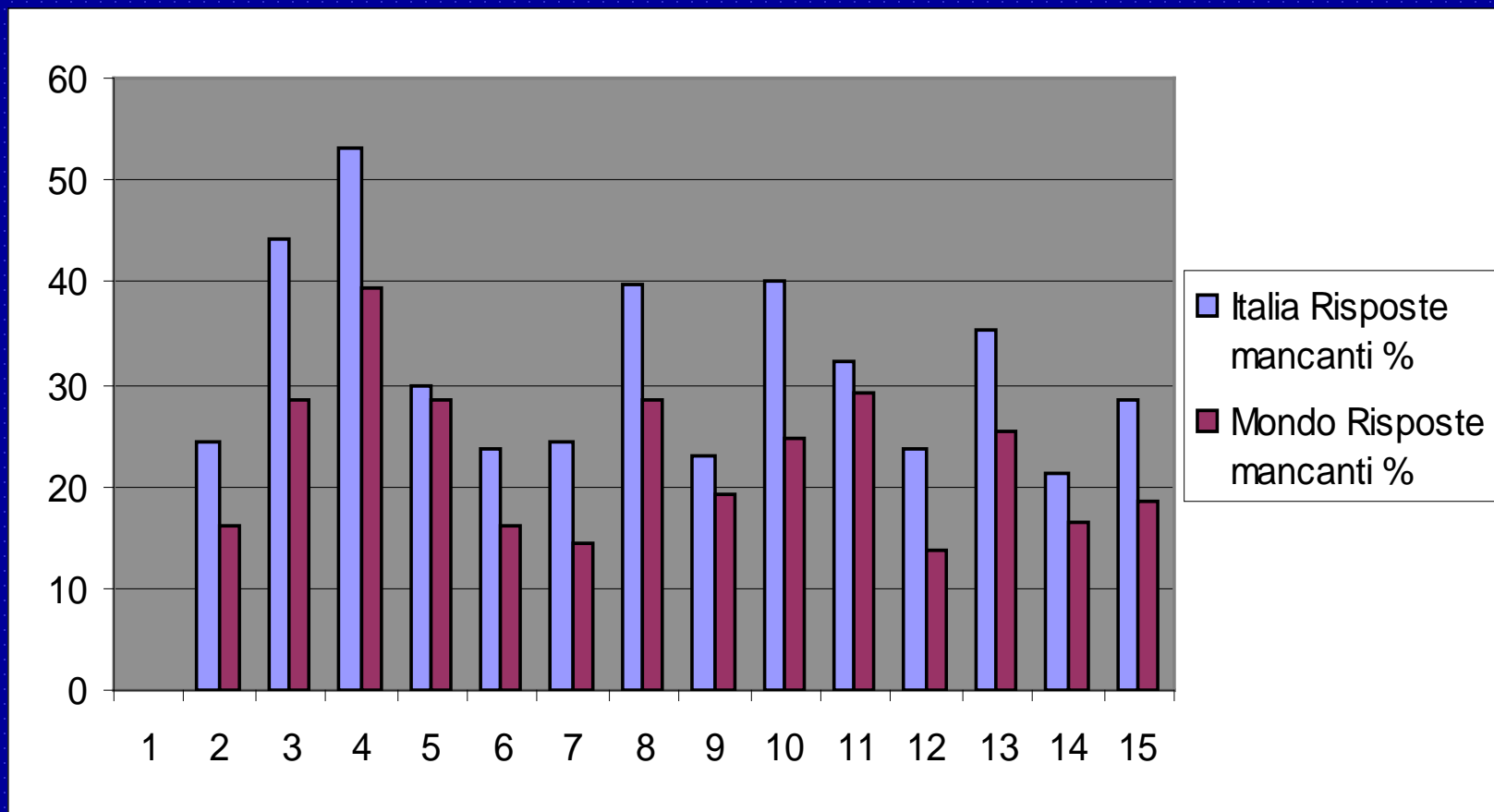
• I maschi vanno meglio delle femmine

Fonte INVALSI

2. Qualche risultato: PISA

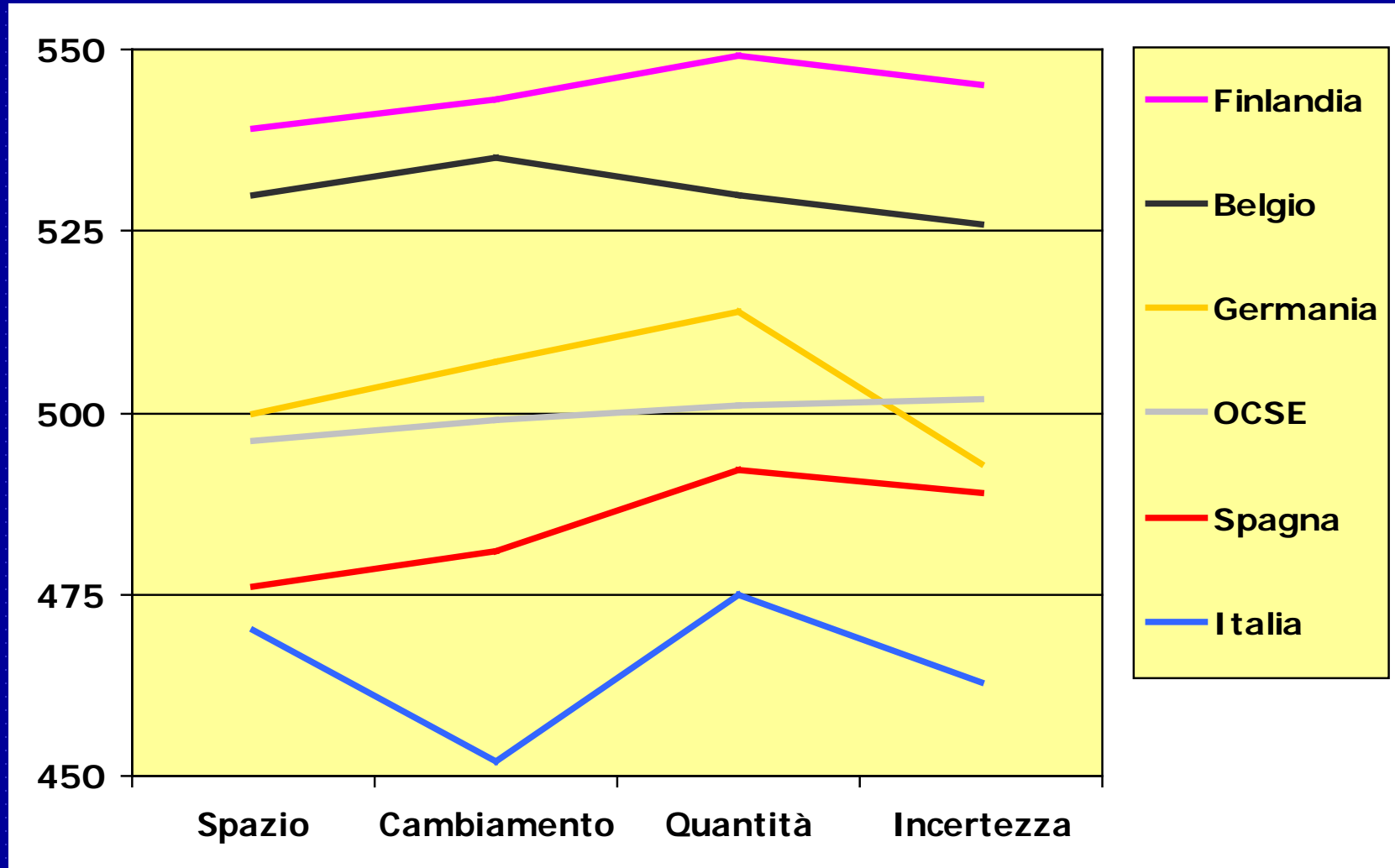
Ma gli studenti italiani sono davvero più portati a rispondere alle domande aperte?

Risposte omesse nel 2000 alle domande aperte



2. Qualche risultato: PISA

Confronto sottoscale di Matematica con alcuni paesi di riferimento (dati 2003)



2. Qualche risultato: l'uso delle tecnologie

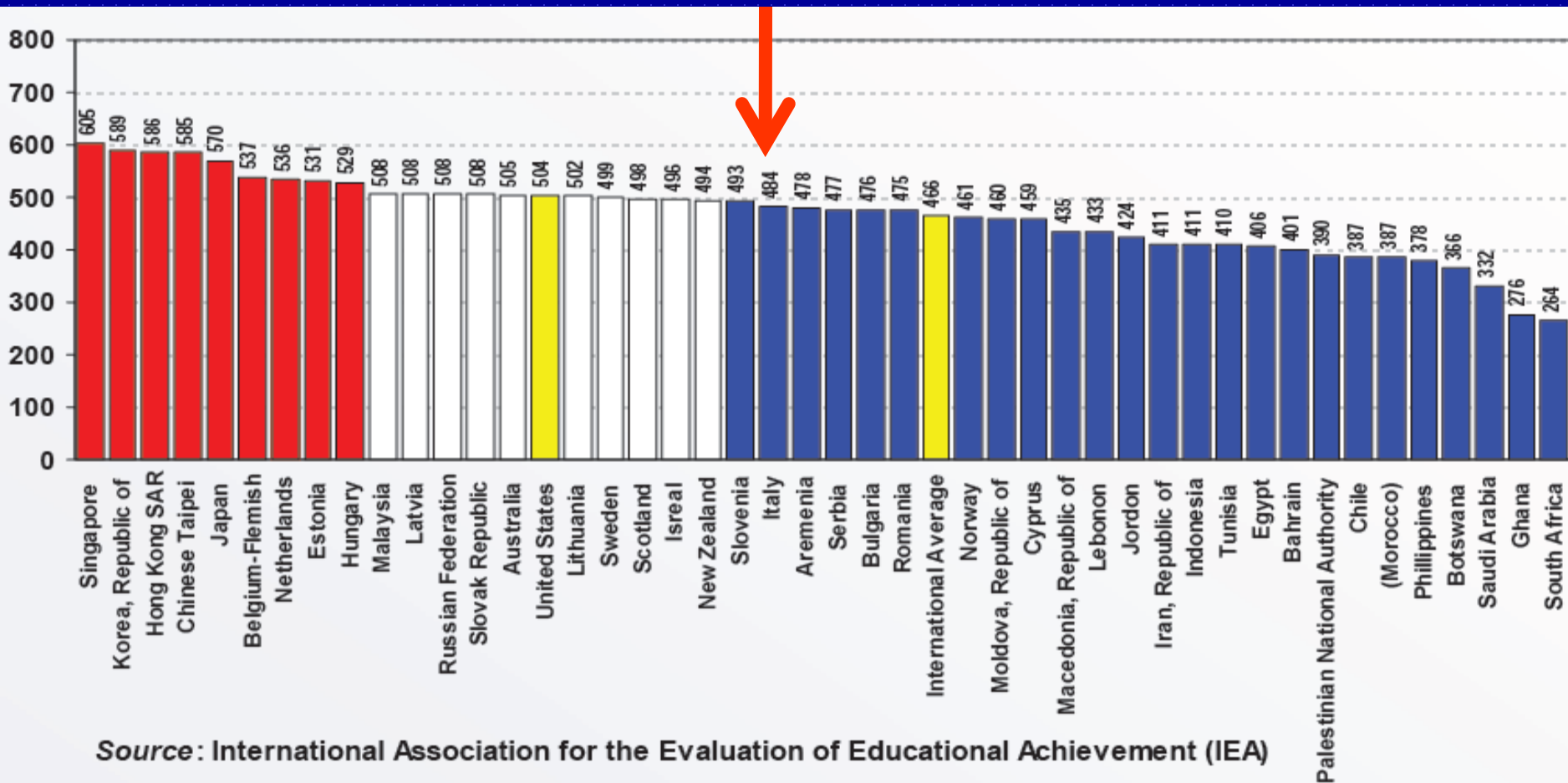
Il questionario 2003 conteneva richieste relative a:

- disponibilità di un **computer a casa** e con che frequenza viene usato
- utilizzo a **scuola**
- **tipo** di utilizzo (Internet, giochi, foglio elettronico, SW matematici, word processor,...)
- autovalutazione di **competenze specifiche**

Le risposte:

- Più dell'**80%** ha la possibilità di utilizzarlo a **casa** e nella stessa percentuale a **scuola**
- ... ma lo usa **frequentemente** l'**80%** a casa, il **50%** a **scuola**. Perché?
- Esiste una correlazione positiva fra risultati e uso di software specifici
- Esiste una correlazione negativa fra risultati e uso generico e prolungato

2. Qualche risultato: TIMMS 2003 cl.8: Matematica

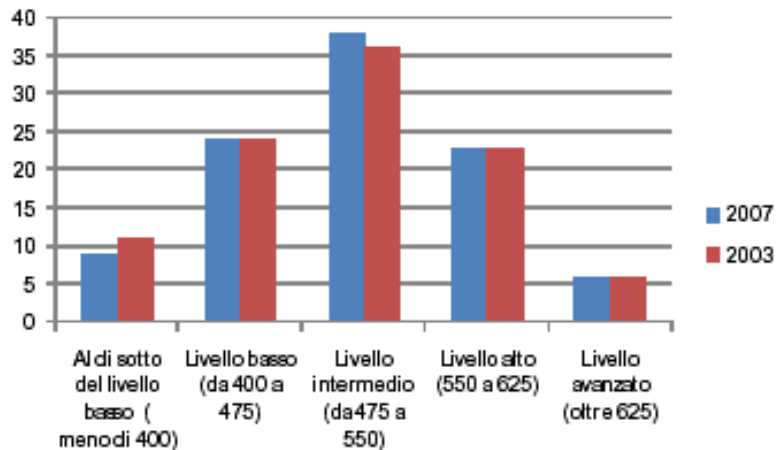


2. Qualche risultato: TIMMS

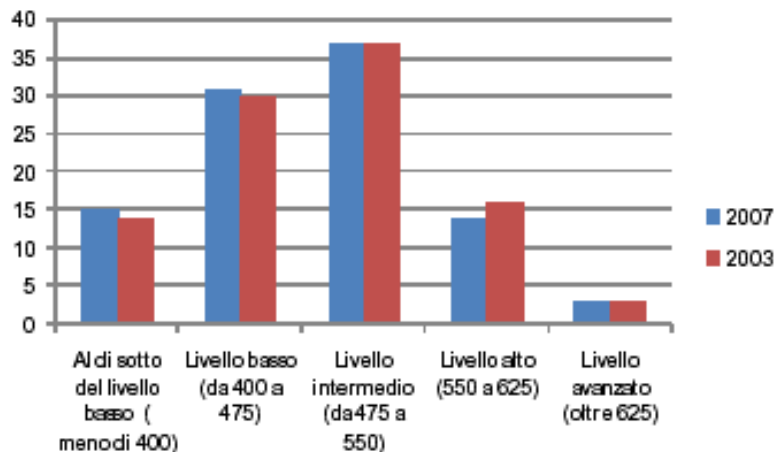
TIMMS

Comparazione risultati studenti italiani per livelli

Matematica quarta primaria



Matematica terza superiore di primo grado



- Non ci sono sostanziali cambiamenti dal 2003 al 2007
- Dalla IV primaria alla III° media aumenta la fascia del livello molto basso e basso e si restringe la fascia di eccellenza

4° grado (IV primaria)– Benchmark alto (550)

*Sequenze e Relazioni – **Selezionare l'espressione che rappresenta una situazione che comporta la moltiplicazione***

M01_12

12

M012048

rappresenta il numero di giornalotti che Lina legge ogni settimana. Quale delle seguenti espressioni rappresenta il numero totale di giornalotti che Lina legge in 6 settimane?

- (A) $6 + \square$
- (B) $6 \times \square$
- (C) $\square + 6$
- (D) $(\square + \square) \times 6$

Media internazionale 58% (0,4)

Italia 50% (2,3)

Singapore 86% (1,4)

Olanda 72% (2,7)

8° grado (III° media) – Benchmark intermedio (475)
Numero – *Risolvere un problema con una sottrazione di numeri decimali*

31

Nella gara di corsa Alice ha realizzato un tempo di 49,86 secondi. Elisabetta nella stessa gara ha realizzato 52,30 secondi. Quanti secondi in più ha impiegato Elisabetta rispetto ad Alice?

- (A) 2,44 secondi
- (B) 2,54 secondi
- (C) 3,56 secondi
- (D) 3,76 secondi

M022010

M04_05

Media internazionale 61% (0,3)

Italia 62% (2,1)

Olanda 81% (2,0)

Singapore 88% (1,0)

Aurelia Orlandoni - Potenza 9 marzo 2010

3. Alcuni problemi italiani

EQUITA':

- grandi differenze territoriali
- grandi differenze TRA scuole
- scarse differenze DENTRO le scuole

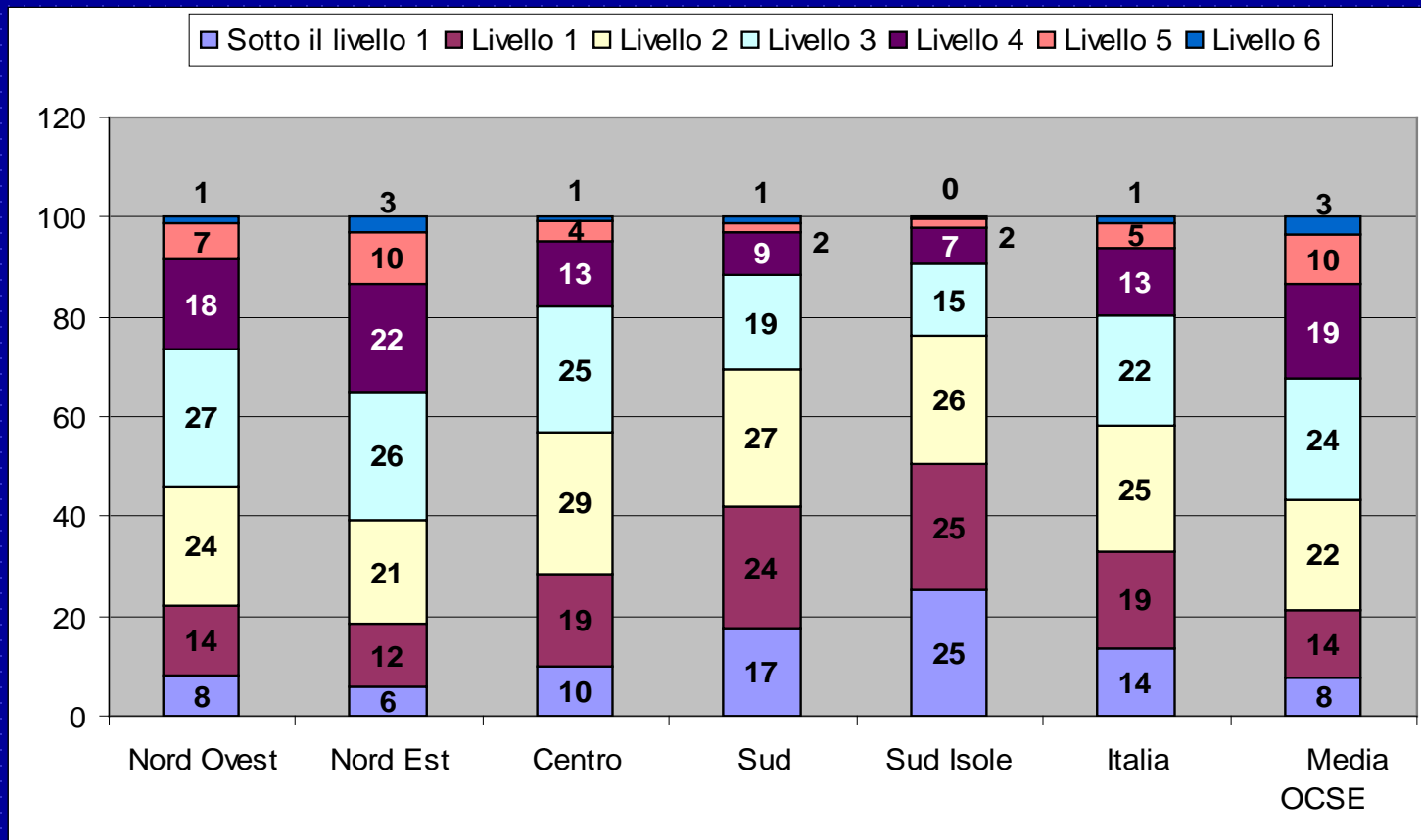
RISULTATI:

- alto tasso di omissioni
- bassa percentuale di “eccellenze” (6%, OCSE 13%)
- alta percentuale sotto il livello di soglia (33% OCSE 22%)

Risultati di PISA 2006

Differenze interne al sistema scolastico italiano

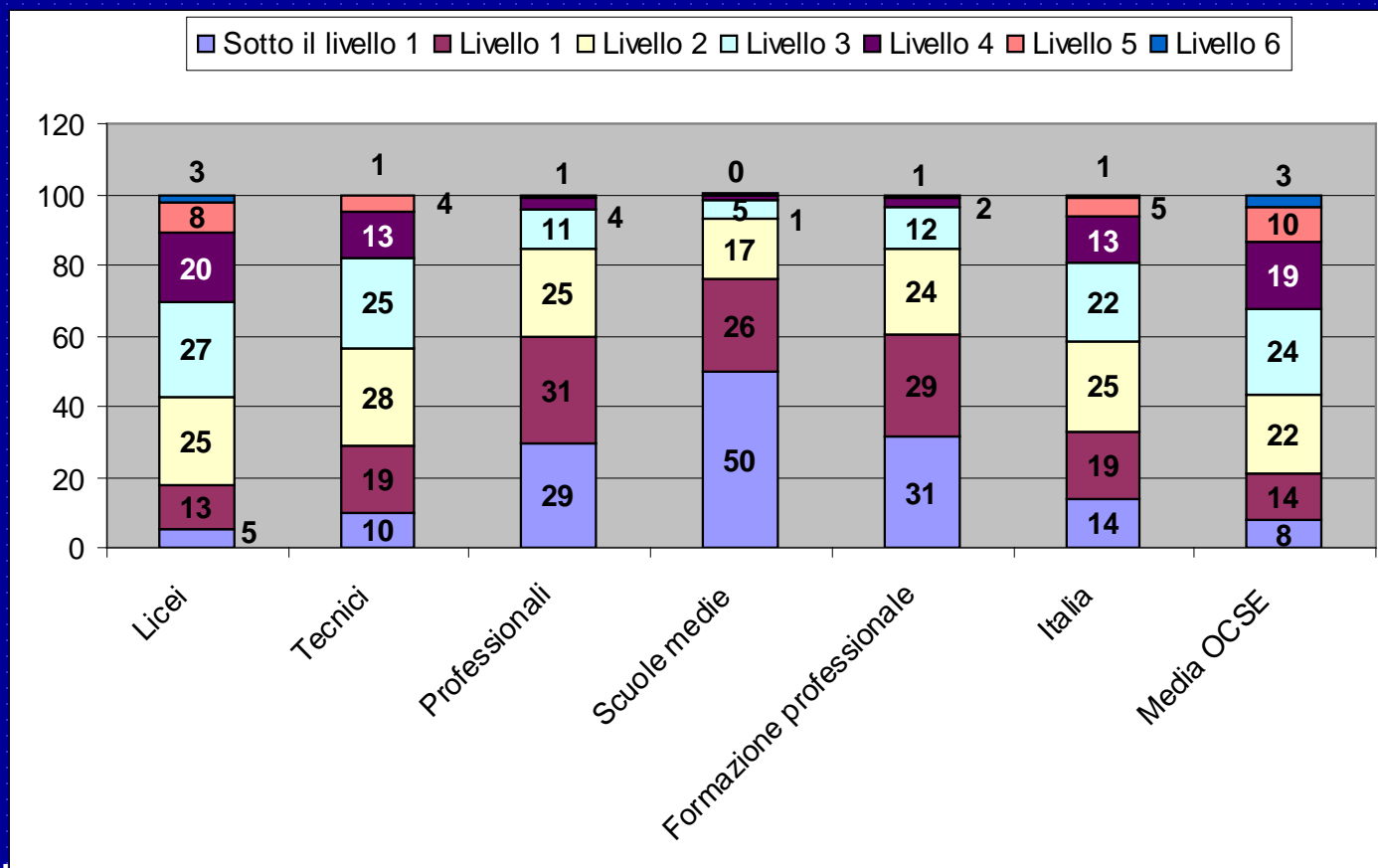
Percentuale studenti in ciascun livello della scala complessiva di *literacy* matematica per area geografica



Risultati di PISA 2006

Differenze interne al sistema scolastico italiano

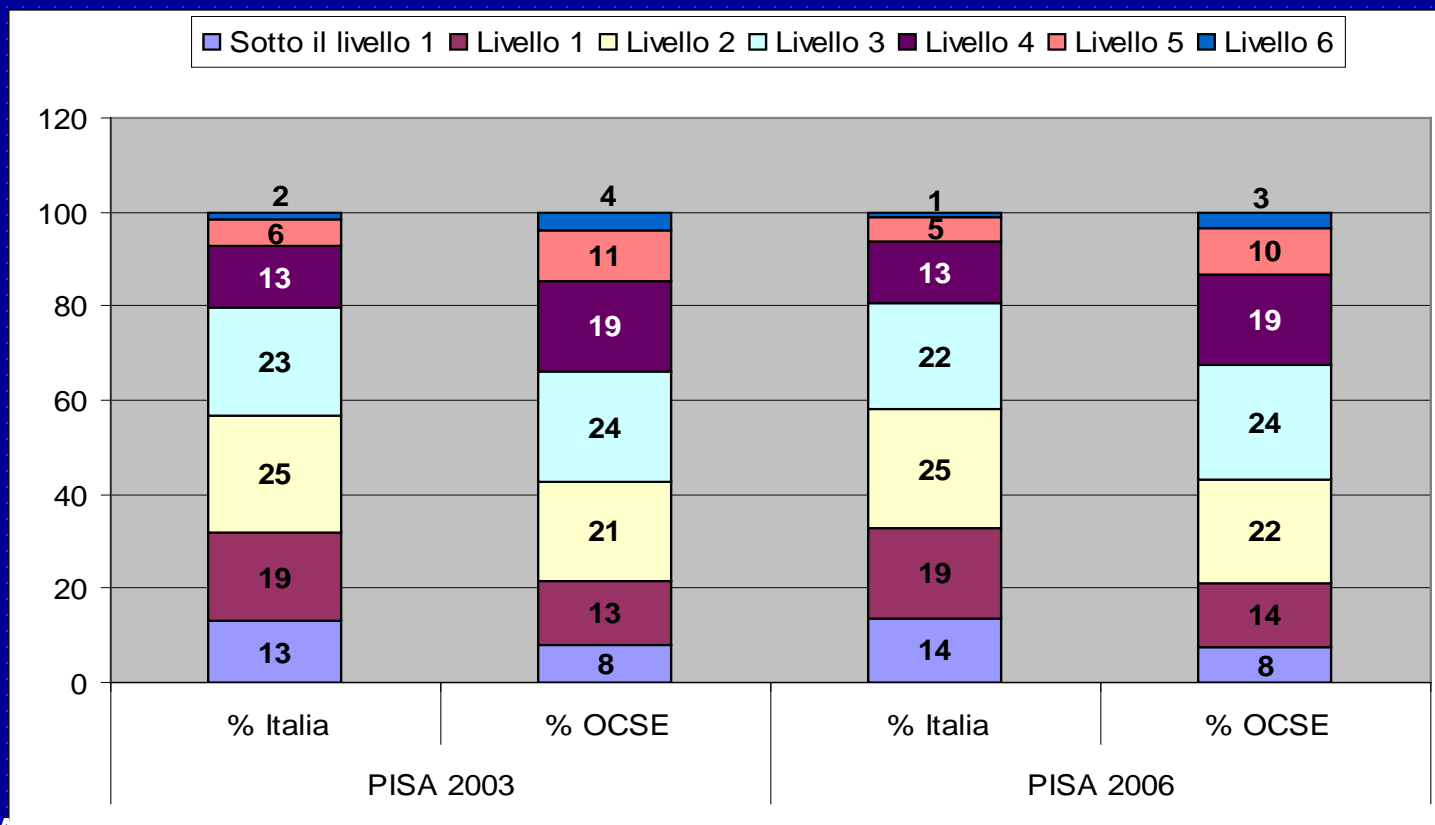
Percentuale studenti in ciascun livello della scala complessiva di *literacy* matematica per tipo di scuola



Risultati di PISA 2006

Linee di tendenza

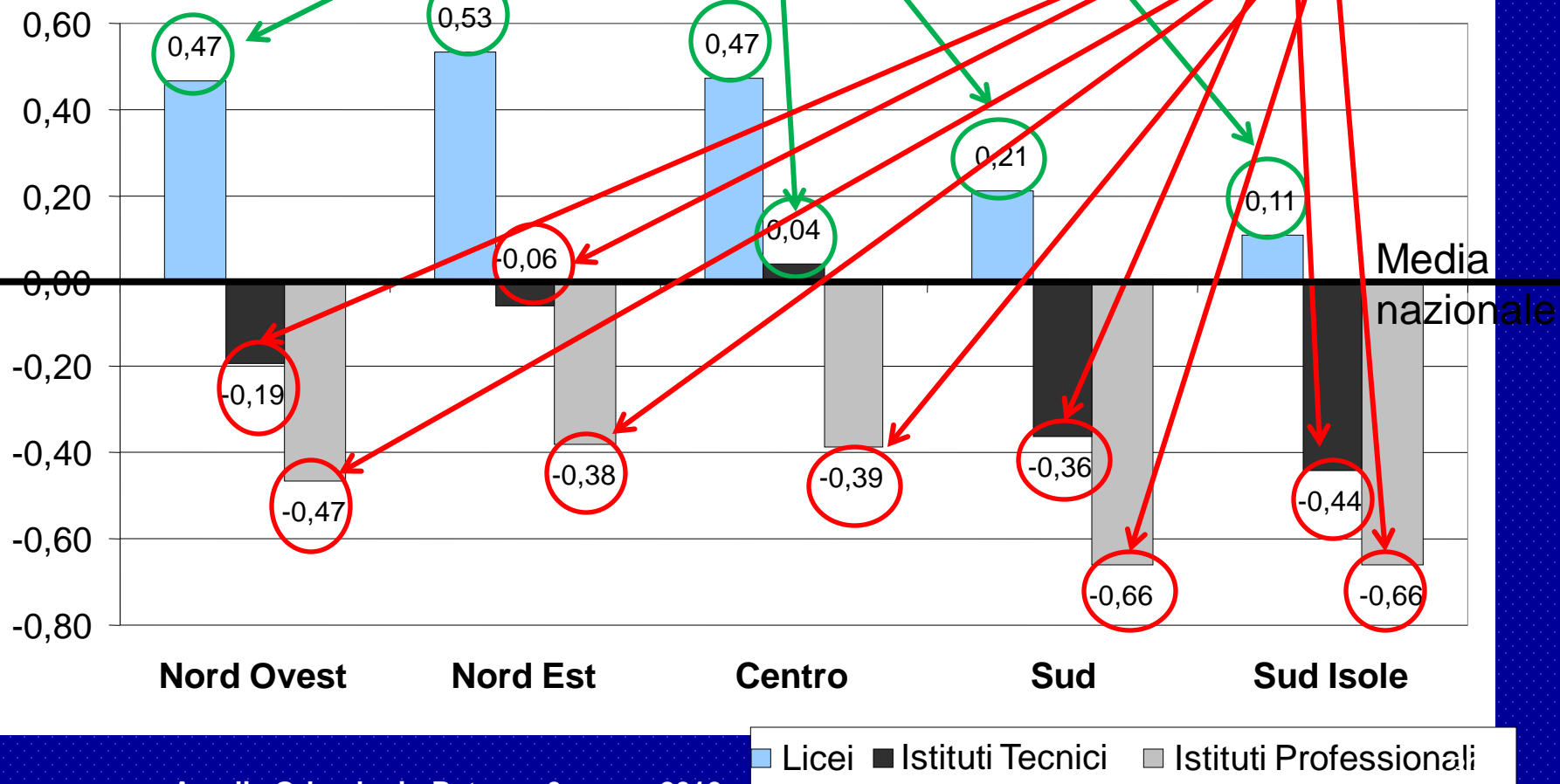
Percentuale studenti in ciascun livello della scala complessiva di *literacy* matematica in PISA 2003 e PISA 2006



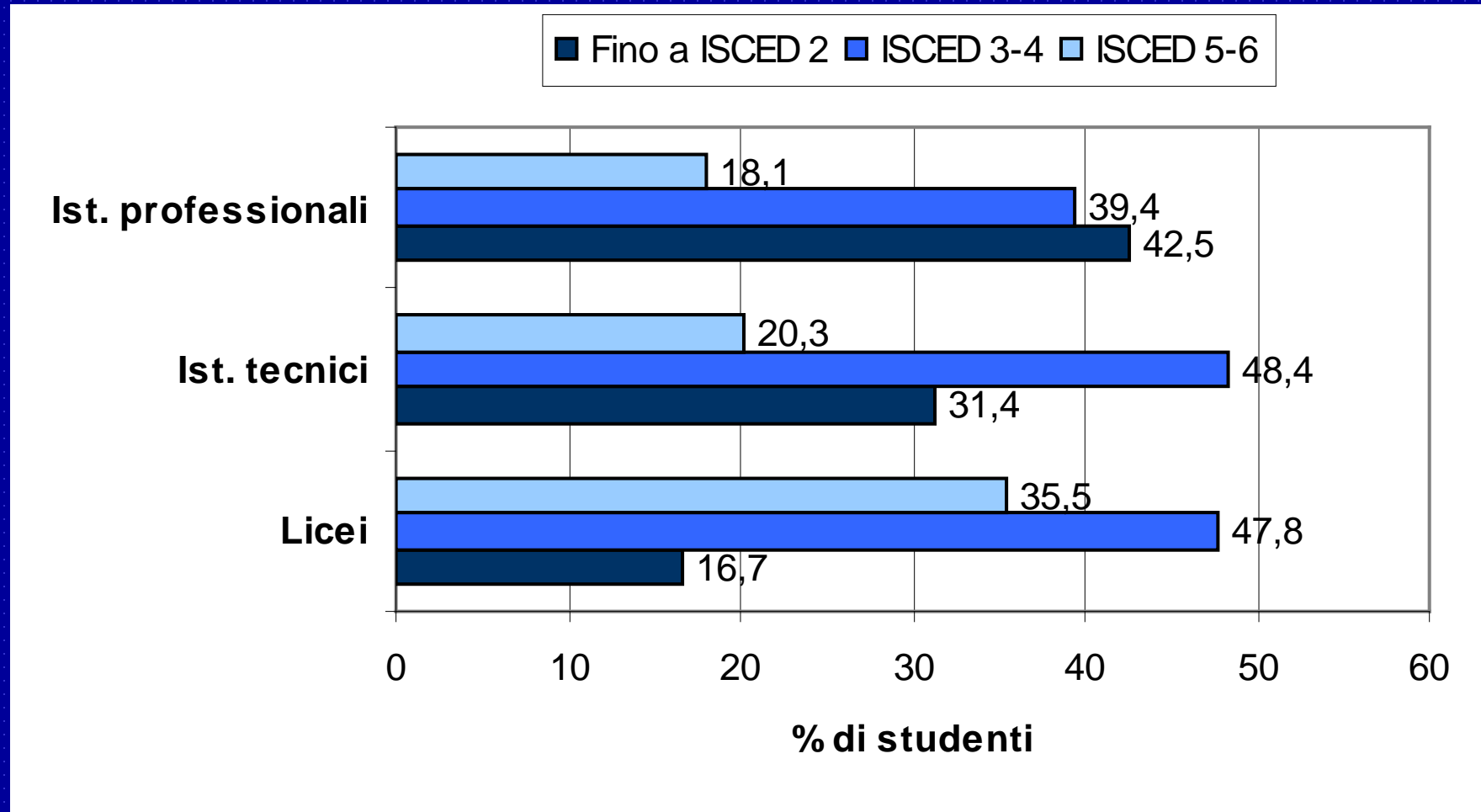
Valori medi indice ESCS per area geografica e per tipo di scuola

In percentuale, lo status socioeconomico degli studenti degli istituti prof. è più basso della media nazionale di:

Si esclude un'inversione di tendenza al centro, in cui le famiglie hanno uno status socioeconomico mediamente più elevato rispetto alla media nazionale di:



Percentuali di studenti per livello di istruzione dei genitori e per tipo di scuola



4. I commenti degli studenti (Stefania Pozio)

- Scarsa capacità a saper individuare i dati necessari per la risoluzione di un problema.
- Convinzione che un problema di matematica si risolve per forza attraverso dei calcoli.
- Utilizzo casuale delle operazioni.
- Errori di calcolo.
- Difficoltà nell'uso delle unità di misura.

4. I commenti degli studenti (Stefania Pozio)

Che differenza trovi tra la matematica che fai a scuola e la matematica che è richiesta in queste prove?

La differenza è nella logica. Cioè, qui è più da ragionarci sopra, da vedere le varie possibilità che si possono avere...Nella matematica a scuola, secondo me, è minore quest'aspetto qui, della logica, del ragionamento.

4. I commenti degli studenti (Stefania Pozio)

Che differenza trovi tra la matematica che fai a scuola e la matematica che è richiesta in queste prove?

Matematica sono calcoli, qui invece sono... matematica sono esercizi....qua invece ti dà un testo con anche, per esempio, soggetti, per esempio un uomo..... che fa venti passi.... invece in matematica fai venti più venti....sono solo numeri .

4. I commenti degli studenti (Stefania Pozio)

Che differenza trovi tra la matematica che fai a scuola e la matematica che è richiesta in queste prove?

Questa credo che è più pratica...senza regole, cose...è meglio... no...tranquilla me piace (si riferisce alla matematica che fa a scuola)...però più...’na cosa de regole, qua diciamo stai più a contatto....se vai a pensa’ all’esercizio della libreria, ti può capitare pure nella vita....

5. La valutazione nazionale esterna: il Servizio Nazionale di Valutazione

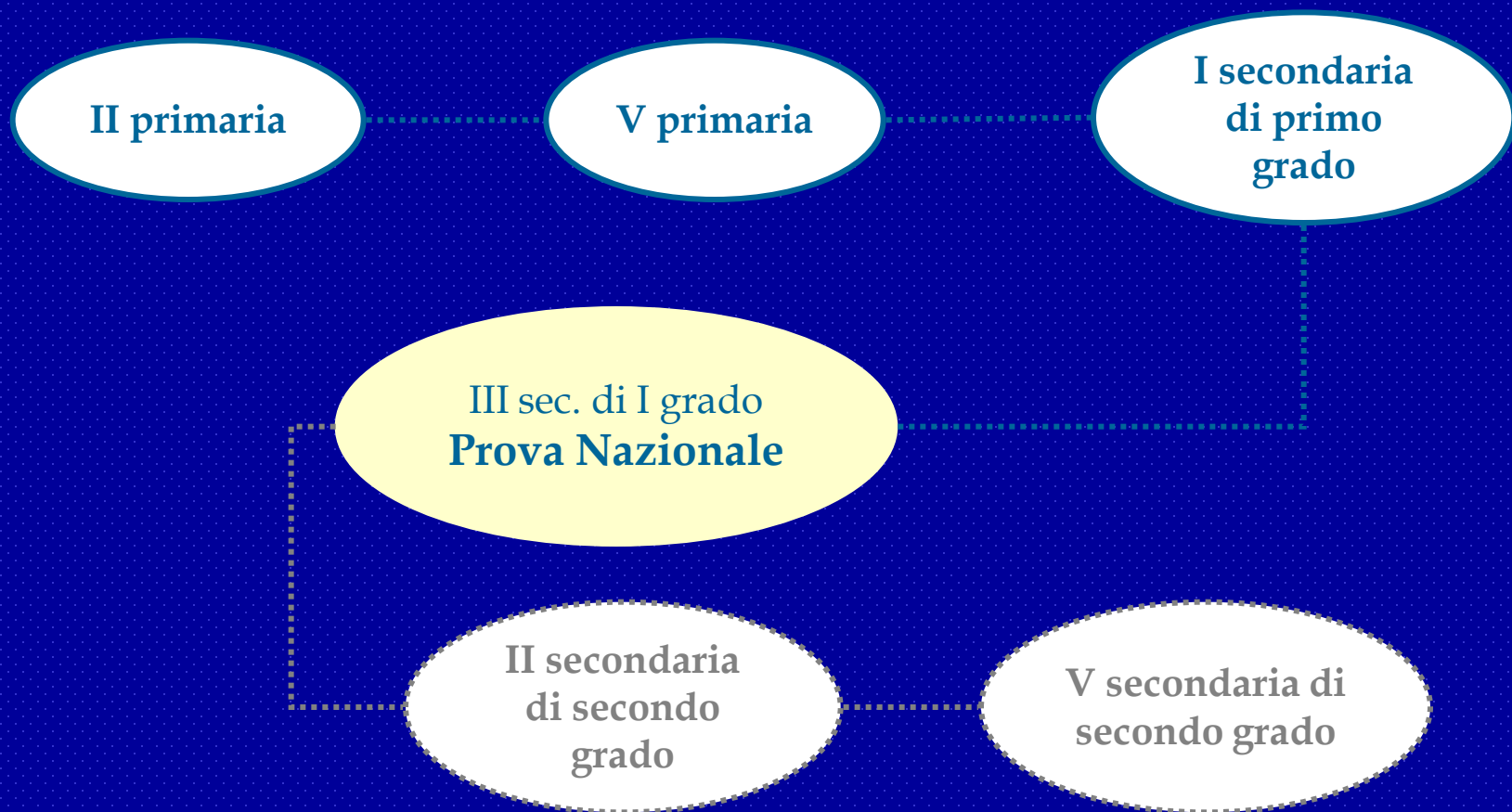
Le Direttive MIUR 74 e 75 del 15/09/2008 sui compiti INVALSI: rilevazione degli apprendimenti.

- **Dall'a.s. 2009 – 2010 la rilevazione è censuaria**
- **Classi coinvolte: II e V primaria, I sec. Primo grado**
- **6 maggio, 11 maggio e 13 maggio**
- **I fascicoli resteranno alle scuole !!!**
- **Domande a scelta multipla, ma anche aperte !!**
- **Prova Nazionale alla fine del primo ciclo**

5. La valutazione nazionale esterna: il Servizio Nazionale di Valutazione



l'apprendimento della Matematica richiede tempi lunghi e quindi anche la valutazione dell'apprendimento va calibrata sul lungo periodo



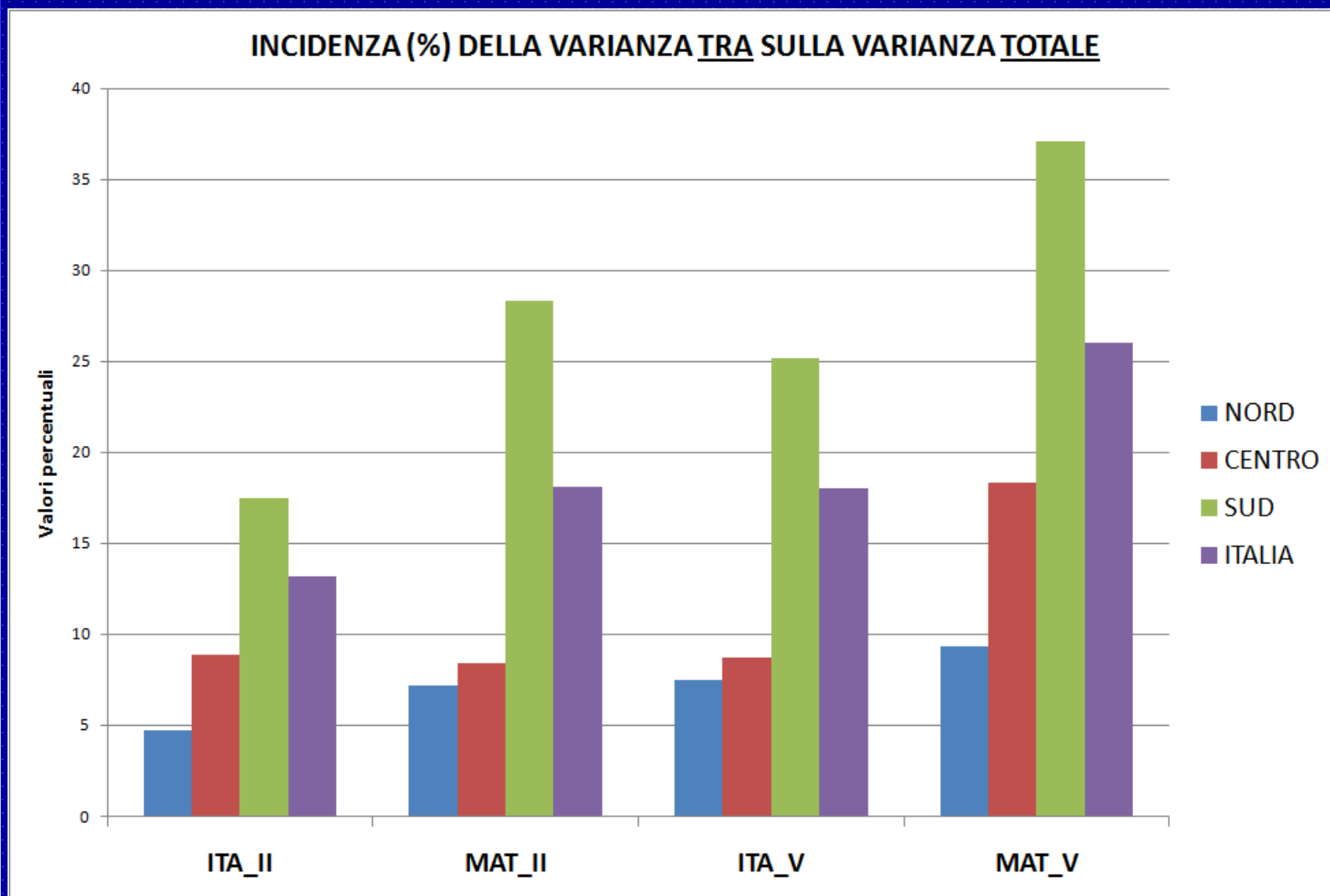
5. La valutazione nazionale esterna in matematica: quale ruolo?

- Restituisce **consapevolezza** agli studenti: posizionamento su una scala assoluta piuttosto che relativa
- Restituisce **consapevolezza** alle scuole
- Restituisce **consapevolezza** ai decisori politici: aiuta ad identificare le priorità?
- Restituisce **credibilità** alle valutazioni interne delle scuole

NOTA-Da una relazione di P. Cipollone - Presidente INVALSI

La variabilità dei risultati **DENTRO** e **TRA** le scuole

- La variabilità **ENTRO** le scuole esprime una misura della diversità dei risultati di ciascun bambino rispetto alla media della scuola frequentata
- La variabilità **TRA** le scuole rappresenta una misura della variabilità dei risultati medi delle scuole che partecipano alla rilevazione
- La variabilità **TOTALE** fornisce una misura della diversità complessiva dei risultati dei bambini senza tenere conto della loro suddivisione per scuola
- L'incidenza (percentuale) della variabilità TRA su quella TOTALE fornisce un'indicazione sull'equità:
 - **valori bassi** indicano che in termini di risultati medi non c'è molta differenza tra una scuola ed un'altra,
 - **valori alti** suggeriscono che il risultato medio di scuola è molto diverso da una scuola ad un'altra.



5. La valutazione nazionale esterna: le finalità della prova nazionale

- **integrare** gli elementi di valutazione propri della scuola con elementi rilevati a livello nazionale in modo da avviare azioni per migliorare la qualità della scuola;
- **allineare** progressivamente le scuole a standard nazionali allo scopo di ottenere, con mirate azioni di stimolo e sostegno, il raggiungimento di livelli crescenti di qualità;
- **acquisire** ulteriori elementi per definire lo stato del sistema d'istruzione.

5. La valutazione nazionale esterna : il valore della prova nazionale

Per gli studenti:

- Una **sfida** perché per la prima volta si cimentano, dopo otto anni di scuola, con una prova esterna.
- Un **servizio** perché acquisiscono maggiore consapevolezza della loro preparazione

Per i genitori:

- Maggiore **trasparenza** dei risultati sugli apprendimenti dei propri figli poiché la prova dovrebbe sostenere la valutazione interna dei docenti

5. La valutazione nazionale esterna:

il valore della prova nazionale

Per la Scuola Secondaria di Secondo Grado:

- Maggiore chiarezza sui livelli di preparazione in **ingresso**
- Possibilità di aprire un dialogo di **continuità verticale**

Per il Sistema:

- Monitorare **l'efficacia** di un sistema scolastico attraverso i risultati ottenuti in termini di livello di apprendimenti degli studenti all'interno di un quadro di riferimento condiviso

Per la Scuola dell'Autonomia:

- Indurre una **riflessione** sia sui contenuti disciplinari che sul processo di insegnamento-apprendimento

5. La valutazione nazionale esterna : che cosa non si può valutare?

- I **diversi processi valutativi** messi in atto dall'insegnante, che accompagnano la vita di classe istante per istante e ne sono parte

**Nessuna prova esterna, per quanto
ben fatta, può sostituirsi alla
valutazione quotidiana dell'insegnante!**

- I **pro** e **contro** della valutazione esterna, in parte di natura metodologica e in parte di natura etica

.... però

- ci sono **aspetti dell'apprendimento** che possono essere valutati (e in qualche modo misurati) attraverso prove esterne.
- le prove esterne sono uno strumento **in più** in mano all'insegnante per arrivare ad una valutazione complessiva dell'allievo
- possono essere strumento di **riflessione** per l'insegnante

5. La valutazione nazionale esterna: il Quadro di riferimento teorico



5. La valutazione nazionale esterna

Dal Quadro di riferimento teorico

| Indicazioni Nazionali e Indicazioni per il curricolo | OCSE-PISA 2006 Overarching ideas (idee chiave) | TIMSS 2007 Content domains (domini di contenuto) | NCTM Standards 2000 Contents (contenuti) |
|---|---|---|---|
| NUMERI | QUANTITA' | NUMERO | NUMERI E OPERAZIONI |
| SPAZIO E FIGURE | SPAZIO E FORMA | GEOMETRIA | GEOMETRIA |
| RELAZIONI E FUNZIONI | CAMBIAMENTI E RELAZIONI | ALGEBRA | ALGEBRA |
| MISURE, DATI E PREVISIONI | INCERTEZZA | DATI E CASO | ANALISI DEI DATI E PROBABILITA' |

... sempre dal Quadro di riferimento teorico

Per ogni ambito sono indicati

Gli oggetti di valutazione:

Ad esempio per Numeri: Numeri naturali e loro rappresentazione in base dieci. Addizione e sottrazione fra numeri naturali.

I processi cognitivi:

1. Conoscere e padroneggiare contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture ...)
2. Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico ...)
3. Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...)

... sempre dal Quadro di riferimento teorico

I processi cognitivi:

4. Conoscere e utilizzare diverse forme di rappresentazione e saper passare da una all'altra (*verbale, scritta, simbolica, grafica, tabellare, ...*)
5. Riconoscere in contesto il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti (*stimare una misura, individuare l'unità di misura appropriata, ...*)
6. Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno con strumenti statistici o funzioni, costruire un modello ...*)
7. Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...*)

... sempre dal Quadro di riferimento teorico

...."Si noti la scelta italiana di utilizzare come titoli dei temi i nomi di **oggetti matematici** e non di teorie, e cioè *numeri* anziché *aritmetica*, *spazio e figure* anziché *geometria*, *relazioni e funzioni* anziché *algebra*, *dati e previsioni* anziché *statistica e probabilità*. Questa scelta tende a valorizzare nel primo ciclo gli oggetti con cui gli *alunni devono fare esperienza*, rispetto alla *sistemazione teorica*, che peraltro non deve essere tralasciata“....

5. La valutazione nazionale esterna: il Quadro di riferimento teorico

La competenza matematica:

- L'apprendimento della matematica è una componente fondamentale **nell'educazione e nella crescita della persona,**

... la matematica è nel cuore del trattamento quantitativo dell'informazione nella **scienza**, nella **tecnologia** e nelle **attività economiche** e nel lavoro, e quindi la competenza matematica è un fattore fondamentale nella **consapevolezza** del futuro cittadino e nella sua riuscita nel mondo **professionale.**

... sempre dal Quadro di riferimento teorico

.....

Si vuole in primo luogo valutare la conoscenza della matematica e dei suoi strumenti, come **conoscenza concettuale**, frutto di interiorizzazione dell'esperienza e di riflessione critica, **non di addestramento "meccanico"** o di apprendimento mnemonico.

La **formalizzazione** matematica dovrebbe infatti essere acquisita a partire **dalla sua necessità ed efficacia** nell'esprimere ed usare il pensiero matematico.

Gli aspetti algoritmici applicativi ed esecutivi, **non** dovrebbero essere considerati **fini a se stessi**.

Esempio di risultati di una classe

Tabella dei dati - Visualizzazione GLOBALE

| Ambiti e argomenti | Dom. | Media% Class e | Media% Scuole PQM | L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | |
|----------------------|------|----------------|-------------------|----|----|----|----|----|----|--|
| MATEMATICA | | | | | | | | | | |
| Numeri | D1 | 94 | 78 | - | - | - | - | L5 | - | |
| Numeri | D2 | 0 | 8 | L1 | - | - | - | - | - | |
| Numeri | D3 | 61 | 28 | - | - | - | - | - | L6 | |
| Numeri | D4 | 50 | 50 | - | - | L3 | - | - | - | |
| Numeri | D5 | 39 | 24 | - | - | - | - | L5 | - | |
| Numeri | D6 | 56 | 38 | - | - | - | - | L5 | - | |
| Numeri | D7 | 44 | 36 | - | - | - | L4 | - | - | |
| Totale Numeri | | 49 | | | | | | | | |

Esempio di risultati di una classe

Tabella dei dati - Dettaglio Risposte tipo: | A | B | C | D |

| Ambiti e argomenti | Dom. | A | B | C | D | MANCATA RISPOSTA |
|---------------------------|------|----|----|----|----|---------------------|
| Numeri | D1 | 0 | 6 | 94 | 0 | 0 |
| Numeri | D2 | 0 | 11 | 0 | 89 | 0 |
| Numeri | D3 | 0 | 6 | 61 | 28 | 6 |
| Numeri | D4 | 0 | 50 | 50 | 0 | 0 |
| Numeri | D5 | 11 | 39 | 6 | 44 | 0 |
| Numeri | D6 | 6 | 6 | 33 | 56 | 0 |
| Numeri | D7 | 44 | 11 | 44 | 0 | 0 |
| Misure, dati e previsioni | D8 | 39 | 39 | 22 | 0 | 0 |
| Misure, dati e previsioni | D9 | 78 | 0 | 0 | 22 | 0 |
| Misure, dati e previsioni | D10 | 0 | 11 | 83 | 6 | 0 |

6. Analisi e commenti

1. Esempio: *Dati e previsioni*

*Caramelle colorate
e
cioccolatini*





6. Analisi e commenti

OECD
PISA
Programme for International Student
Assessment

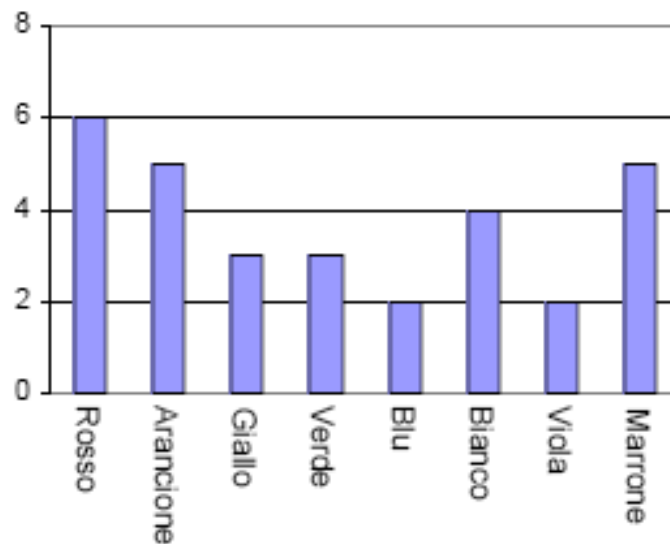
2006

CARAMELLE COLORATE

Domanda 1: CARAMELLE COLORATE

M467Q01

La mamma permette a Roberto di prendere una caramella da un sacchetto. Roberto non può vedere le caramelle. Il seguente grafico mostra il numero di caramelle di ciascun colore che ci sono nel sacchetto.



STIMOLO

6. Analisi e commenti

Domanda 1: CARMELLE COLORATE

Qual è la probabilità che Roberto prenda una caramella di colore rosso?

A 10%

B 20%

C 25%

D 50%

Livello di difficoltà: 4

Risultati PISA 2003

Italia 33,7% OCSE 49,7%

6. Analisi e commenti

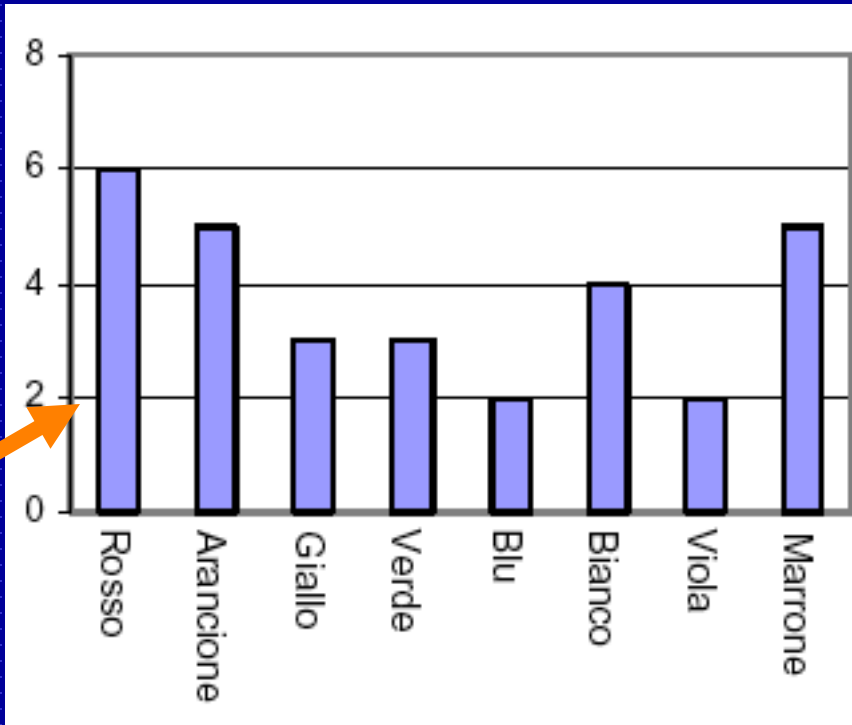
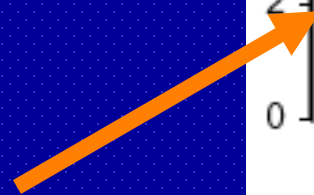
Cosa deve fare uno studente per rispondere correttamente?

- leggere e interpretare il grafico
- conoscere il concetto di probabilità classica CF/CP
- trovare sul grafico il numero di tutte le caramelle e individuare il numero delle caramelle rosse (6 caramelle rosse su 30 caramelle)
- passare dalla frazione alla percentuale ($6/30=20\%$)

6. Analisi e commenti

Dove sbagliano gli studenti e perché

Si concentrano
sull'altezza relativa
delle colonne e
danno le risposte più
disparate



6. Analisi e commenti: dalle interviste di Stefania Pozio

Antonio: ... Secondo me il 50 per cento perché sono maggiori... ha più probabilità di prendere quelle rosse...

Intervistatore: E quindi secondo te è 50% perché la colonna è più alta?

Antonio: Sì, ha più probabilità di prendere queste.

Francesco: Eh sì non mi ricordo il calcolo Quella che mi sembra più ovvia diciamo io direi il 25... Beh il 10 mi sembra un po' troppo poco visto che... Sì...ci stanno certi ancora più bassi....20... Sono indeciso tra il 20 e il 25.

Intervistatore: E il 50 perché lo escludi?

Francesco: Beh mi sembra troppo grande... Ci sta pure il marrone e gli arancioni che sono sempre 5..... Quindi... Diciamo... 25%.... Eh, non mi ricordo il calcolo (ride).

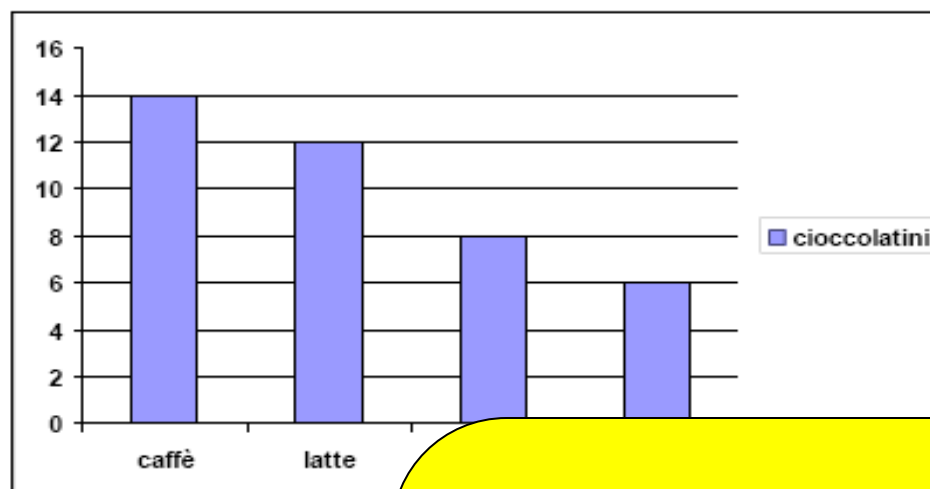
Carolina: i rossi sono maggiori.. e poi ci sono altri...(conta le altre colonnine del grafico) uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette diversi tipi di caramelle.. ed essendo in maggioranza.... ma, diciamo, non assoluta perché ci sono altre buona parte di caramelle..

Intervistatore: ..ma perché dici 20 e non 25 o non 50 o 10...come hai escluso le altre tre risposte....in base a quale ragionamento

Carolina: sinceramente non lo so, **credo soltanto che sia la più logica.**

6. Analisi e commenti

C7. Il grafico mostra il numero dei cioccolatini di diversi gusti contenuti in una scatola.



Prendendo un cioccolatino a caso,
nocciola?

- A. $\frac{6}{14}$
 B. $\frac{6}{40}$
 C. $\frac{6}{34}$
 D. $\frac{1}{4}$

RISULTATI ITALIA

- A. 15,9
 B. 66,6
 C. 5,4
 D. 8,6

Omissioni 3,4

17 giugno 2008

6. Analisi e commenti

Cosa deve fare uno studente per rispondere correttamente?

- ✓ Deve saper leggere il grafico
- ✓ Conoscere il concetto di probabilità classica
- ✓ riconoscere la frazione che corrisponde alla probabilità

E' analogo al quesito PISA, ma molto più semplice

6. Analisi e commenti

Dove sbagliano gli studenti

Anche in questo caso l'analisi delle risposte errate ci dice che l'attenzione si focalizza sull'altezza relativa delle colonne

6. Analisi e commenti

E gli insegnanti?

Intervistatore: come ti è sembrato il quesito sulla probabilità?

Insegnante: se fossero stati così mi interesserebbe di più. Sarebbe stato più facile, più simile alla vita che si fa.

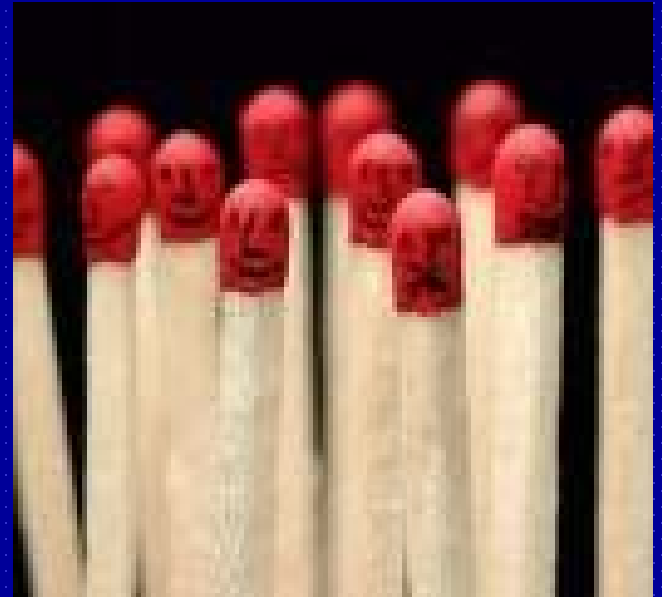
Intervistatore: come ti è sembrato il quesito sulla probabilità?

Insegnante: certo, ma non è un quesito da risolvere in un attimo. E due insieme.

**Questo dovrebbe far riflettere
sull'approccio alla probabilità
che si fa "normalmente" in classe!**

6. Analisi e commenti

2. Esempio: *Relazioni fiammiferi*



6. Analisi e commenti

La prova nazionale alla fine del primo ciclo

17 giugno 2008

C12. Alcuni fiammiferi sono disposti come indicato

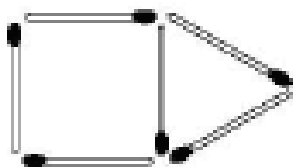


Figura 1

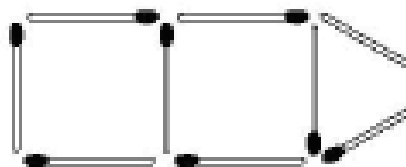


Figura 2

Se si continua la sequenza delle figure, quante fiammiferi ci saranno nella figura numero 10?

- A. 30
- B. 33**
- C. 36
- D. 42

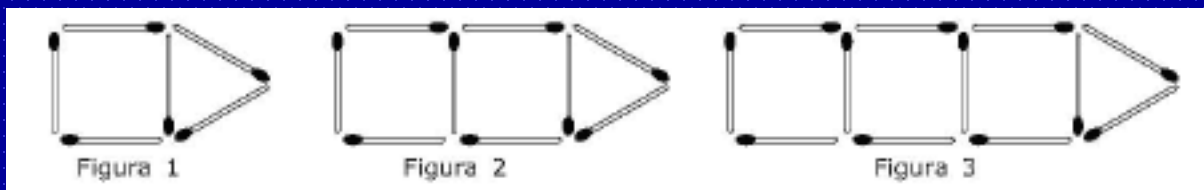
RISULTATI ITALIA

- A. 7,9
- B. 69,3
- C. 7,5
- D. 11,9

Omissioni 3,4

6. Analisi e commenti

Cosa deve fare uno studente per rispondere correttamente?



6

9

12



+3

- ✓ scoprire la regolarità dopo aver contato i fiammiferi
- ✓ procedere fino alla figura 10

7. Quali spunti didattici?

Immaginiamo di usare questo quesito come situazione problematica da proporre alla classe

Alla scuola primaria

- ✓ costruisci con i dati
- ✓ prova ad
- ✓ che c
- ✓ che
- ✓ spieg

**Ricerca di regolarità
Introduzione al concetto
di variabile**

7. Quali spunti didattici?

Immaginiamo di usare questo quesito come situazione problematica da proporre alla classe

Alla scuola secondaria di I grado

✓ spiegare perché ci si accende l'erimento
alla figura

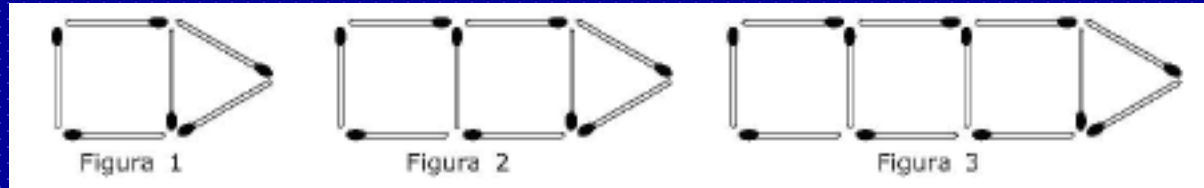
**Introduzione al concetto di
variabile, di formula generale;
idea di congettura e dimostrazione**

la figura

descrive

“funziona”?

7. Quali spunti didattici?



n = numero quadrati

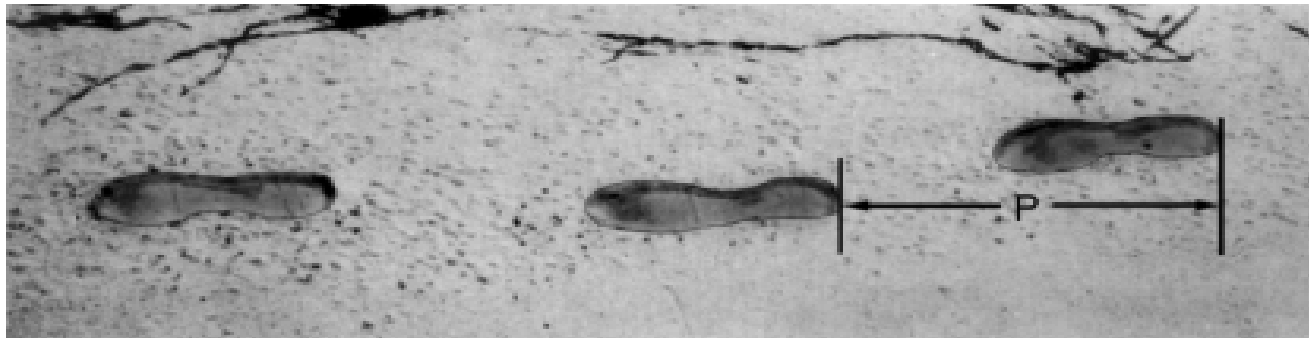
n=ennesima figura

F=

**Confronta procedimenti diversi e produce
formalizzazioni che gli consentono di passare
da un problema specifico ad una
classe di problemi**

7. Quali spunti didattici?

ANDATURA



La figura mostra le orme di un uomo che cammina. La lunghezza P del passo è la distanza tra la parte posteriore di due orme consecutive.

Per gli uomini, la formula $\frac{n}{P} = 140$ fornisce una relazione approssimativa tra n e P dove:

n = numero di passi al minuto, e

P = lunghezza del passo in metri.

STIMOLO

7. Quali spunti didattici?

Domanda 1: ANDATURA

Se la formula si applica all'andatura di Enrico ed Enrico fa 70 passi al minuto, qual è la lunghezza del passo di Enrico? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

Livello di difficoltà: 5 (su 6 livelli) quindi considerato alto

Risultati risposte corrette

PISA 2003

Italia 15,8% OCSE 35,9%

Omissioni

Italia 40,8% OCSE 20,7%

7. Quali spunti didattici?

Cosa deve fare uno studente per rispondere correttamente?

- ✓ Ricavare il dato dal testo $n=70$
- ✓ Fare una sostituzione nella formula data $n/p= 140$
 $70/p= 140$ $p=70/140$ $p=0,5$ m lunghezza passo
- ✓ Interpretare il risultato

7. Quali spunti didattici?

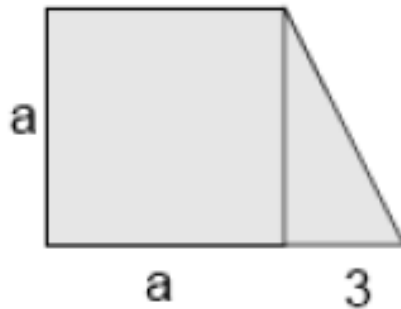
Dalle interviste di Stefania Pozio a studenti di classe I° (secondaria di II° grado)

- $140/70 = 2$ errore più frequente;
- $140:70$ = segue risultato errato. ("Due cm sono una distanza troppo piccola quindi la lunghezza sarà di 20 cm").
- $70/60 = 1,16$ (numero di passi al minuto)
- $140 * 70 = 9800$

Omar: 140 per 70 (*batte sulla calcolatrice*) 9800.....questa sarebbe la lunghezza dei passi (*poi ci ripensa*)... **però mi sa che quella prima era sbagliata...**perché mi sono reso conto che 9800 metri sono troppi per un passo... quindi.....**forse** sarà 140 diviso n..... 2 metri.

7. Quali spunti didattici?

D18. Scrivi la formula che esprime come varia l'area A della figura qui di fianco, al variare della lunghezza a .



$A =$ _____

Relazioni e funzioni

individuare una formula relativa all'area A di una figura piana utilizzando la variabile a

- 26,8 % corrette
- 64,3% errate
- 9,0% omesse

7. Quali spunti didattici?

Perché i risultati sono così negativi?

- Richiesta non usuale
- Per gli studenti le lettere nelle formule di geometria, sono semplicemente delle *etichette*, iniziali di area, base,

Quale approccio all'algebra?

Nella scuola media non è tanto importante il calcolo algebrico in quanto tale, ma **lavorare sui significati di variabile**

7. Quali spunti didattici?

Dalle prove 2004-05 tip. A

La domanda 11 ottiene la percentuale di risposte esatte più bassa a livello nazionale (26,48%)

Domanda n° 11

$$2^3 + 2^6 =$$

- ☐ A. 2^9
- ☐ B. 2^{18}
- ☐ C. 4^9
- ☐ D. 9×2^3

*In terza superiore, probabilmente, gli studenti **hanno dimenticato** il **significato di potenza** di un numero e non è per loro usuale trasformare la potenza; d'altra parte non trattano nemmeno l'espressione dal punto di vista algebrico.*

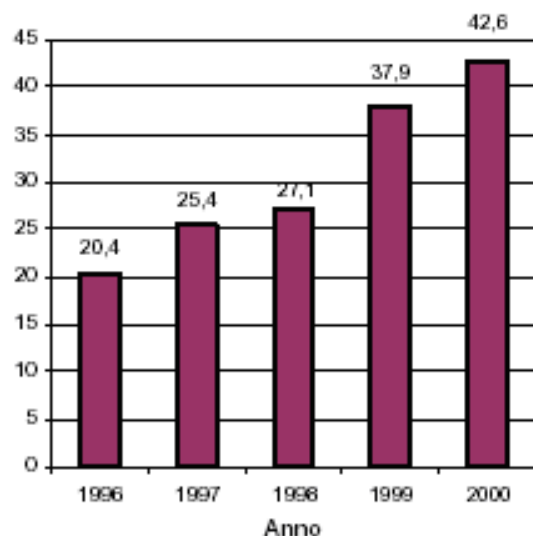
*Si può ipotizzare che **se avessero avuto la stessa espressione con le lettere** il meccanismo algebrico sarebbe scattato. Il quesito mette in luce il **problema del controllo semantico di un'espressione**.*

7. Quali spunti didattici? un'esperienza

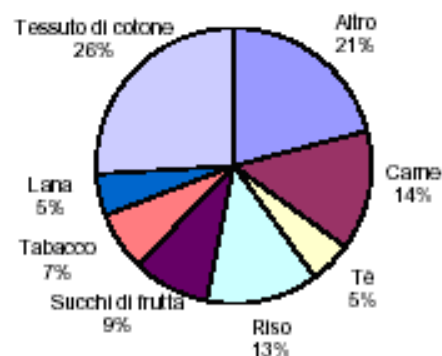
ESPORTAZIONI

I seguenti grafici forniscono alcune informazioni sulle esportazioni della Zedlandia, un Paese in cui si usa lo zed come moneta corrente.

Totale delle esportazioni annue della Zedlandia in milioni di zed, 1996-2000



Distribuzione delle esportazioni della Zedlandia nel 2000



7. Quali spunti didattici? un'esperienza

ESPORTAZIONI

Che domande fareste?

- Analizzando l'istogramma, cosa ci si aspetta nelle esportazioni negli anni successivi? Si può dare una linea di tendenza alle esportazioni?
- Calcolare le variazioni delle esportazioni da un anno all'altro in percentuale dall'istogramma. (Approfondimenti)
- Qual è la media delle variazioni percentuali ?
- Recuperare il tasso di inflazione e distinguere il tasso di crescita nominale da quello effettivo
- Calcolare l'ammontare in zed delle esportazioni del cotone, in quale anno è possibile farlo e perché?
- Calcolare l'introito ripartito del 2000 in zed e darne un'altra rappresentazione, E' possibile trasformare la torta in istogramma e perché?
- Calcolare i dati delle esportazioni del 2000 raggruppati per categorie (alimentari/non alimentari)
- Individuare la tipologia dell'esportazione più frequente, ordinarle,....
Le tipologie sono confrontabili?
- E' possibile determinare il valore assoluto delle esportazioni? Che dati mancano?

7. Quali spunti didattici? un'esperienza

Domanda 1:

Qual è stato l'ammontare totale (in milioni di zed) delle esportazioni della Zedlandia nel 1998?

Risposta:

Domanda 2:

Quale è stato l'ammontare delle esportazioni di succhi di frutta della Zedlandia nel 2000?

- 1,8 milioni di zed
- 2,3 milioni di zed
- 2,4 milioni di zed
- 3,4 milioni di zed
- 3,8 milioni di zed

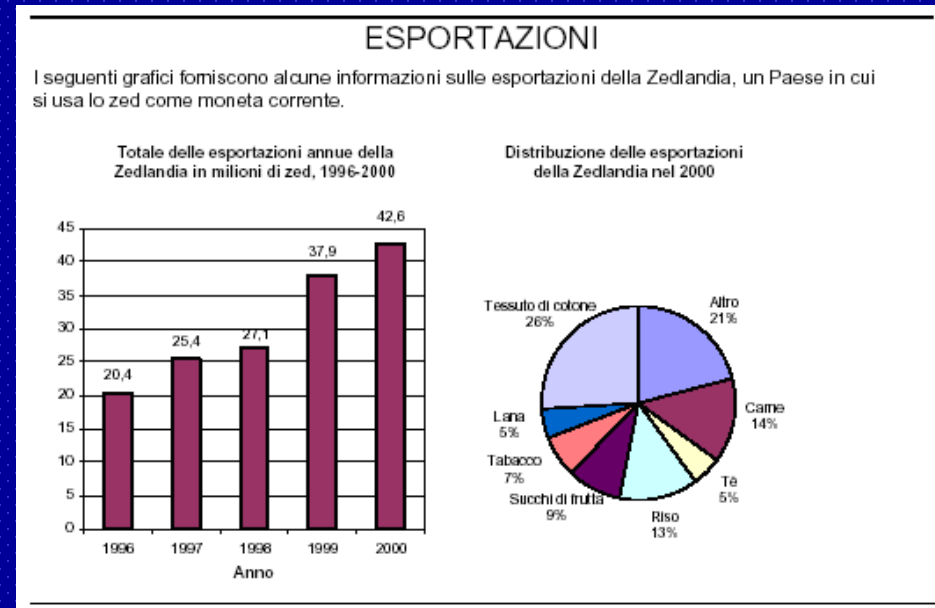
Raggruppamento: riproduzione

Livelli di difficoltà: Domanda 1-> livello 2

Italia (64,1%, 17,9%, 12,7%) OCSE (76,5%, 7,3%, 13,4%)

Domanda 2-> livello 4

Italia (37,1%, 15,2%, 9,5%) OCSE (46,9%, 6,7%, 10,2%)

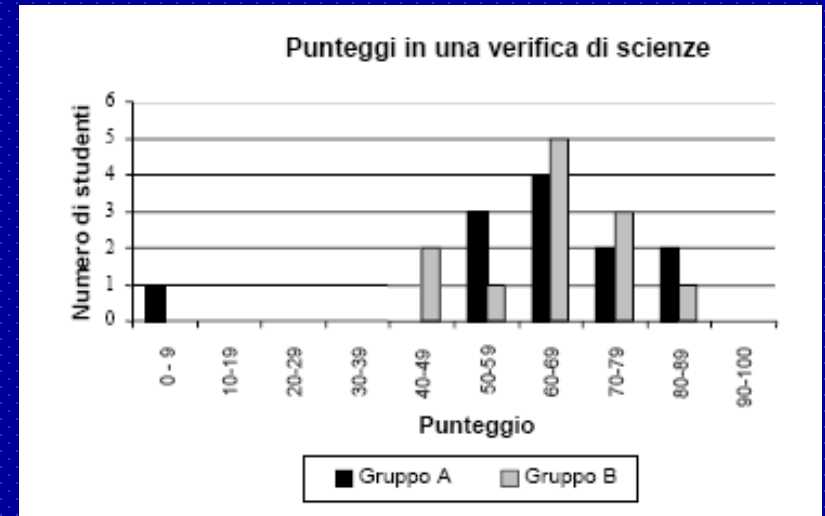


7. Quali spunti didattici? un'esperienza

RISULTATI DI UNA VERIFICA

Il grafico seguente mostra i risultati di una verifica di scienze, ottenuti da due gruppi di studenti, indicati come Gruppo A e Gruppo B.

Il punteggio medio del Gruppo A è 62,0 e quello del Gruppo B è 64,5. Per avere la sufficienza, gli studenti devono ottenere almeno 50 punti.



7. Quali spunti didattici? un'esperienza

VERIFICA DI SCIENZE

Che domande fareste?

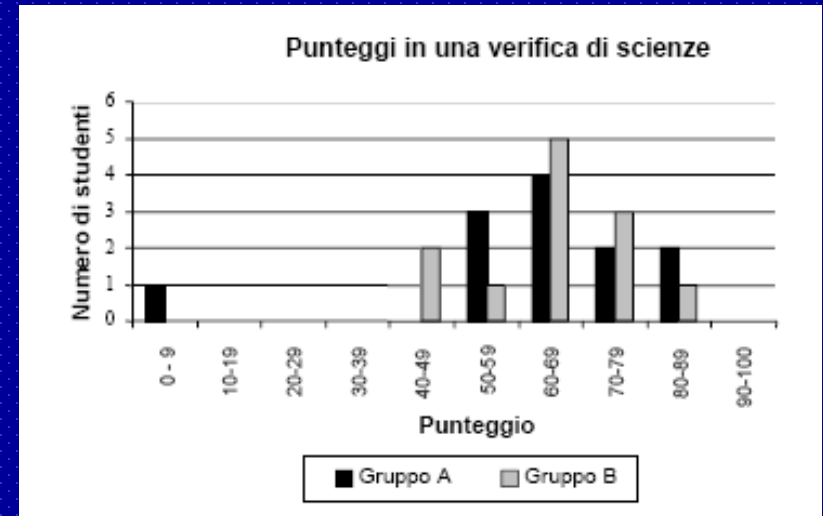
- Quanti alunni per gruppo hanno meritato la sufficienza?
- Trovare quanti alunni ci sono nel gruppo A e nel gruppo B
- Qual è il gruppo più omogeneo? Qual è il gruppo migliore? Perché?
- Se tu fossi un alunno in quale gruppo vorresti essere? Perché?
- Quale sarà il gruppo migliore per l'insegnante? Perché? Prova a trovare argomenti per sostenere che è meglio il gruppo A e altri per sostenere che è meglio il gruppo B
- Rielabora i dati in modo da dimostrare che è migliore il gruppo X
- Trovare le percentuali di sufficienze nei due gruppi
- Qual è la moda dei due gruppi? Qual è il punteggio più frequente del gruppo A e del gruppo B?
- Media aritmetica, moda e mediana come sono disposte fra loro e cosa si può dedurre
- Qual è la probabilità che uno studente si trovi nel gruppo A? e nel gruppo B?
- A quale gruppo preferiresti appartenere?
- Qual è il punteggio medio totale? Perché?
- E' possibile ricavare le tabelle di partenza? Come?

7. Quali spunti didattici? un'esperienza

RISULTATI DI UNA VERIFICA

Il grafico seguente mostra i risultati di una verifica di scienze, ottenuti da due gruppi di studenti, indicati come Gruppo A e Gruppo B.

Il punteggio medio del Gruppo A è 62,0 e quello del Gruppo B è 64,5. Per avere la sufficienza, gli studenti devono ottenere almeno 50 punti.



In base a questo grafico, l'insegnante sostiene che, nella verifica, il Gruppo B è andato meglio del Gruppo A.

Gli studenti del Gruppo A non sono d'accordo con l'insegnante. Essi cercano di convincere l'insegnante che il Gruppo B non è necessariamente andato meglio. Con l'aiuto del grafico, suggerisci agli studenti del Gruppo A una spiegazione matematica che potrebbero usare.

Raggruppamento: connessioni

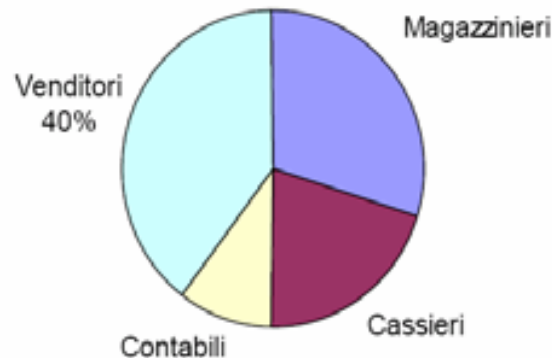
Livelli di difficoltà: livello 4

Italia (15,3%, 54,7%, 24,9%) OCSE (31,3%, 34%, 31,9%)

7. Quali spunti didattici?

In una grande libreria gli impiegati sono così suddivisi:

| Mansione | Numero di impiegati |
|--------------|---------------------|
| Magazzinieri | ? |
| Cassieri | 4 |
| Venditori | 8 |
| Contabili | 2 |



Qual è il numero dei magazzinieri?

Risposta _____

Scrivi il procedimento che hai seguito.

Il quesito valuta la capacità di collegare tra di loro diverse rappresentazioni dello stesso insieme di dati, e di operare con le percentuali per trovare un dato mancante.

Dalle Indicazioni per il curriculum 2007: calcolare percentuali; rappresentare insieme di dati; riconoscere e risolvere problemi di vario genere analizzando la situazione e traducendola in termini matematici, spiegando anche in forma scritta il procedimento seguito.

7. Quali spunti didattici?

D4. D4 Se n è un numero naturale qualsiasi, quale procedimento devi seguire per essere sicuro di ottenere sempre un numero dispari?

- ☐ A. $n-1$
- ☐ B. $n+1$
- ☐ C. $n \times 2 + 1$
- ☐ D. $\frac{n}{2} + 1$

Il quesito richiede di individuare una formula per ottenere un numero dispari a partire da un numero naturale qualsiasi.

È stato risolto correttamente **(C)** dall'86,8% degli studenti, segno che la scrittura algebrica dei numeri dispari è nota agli studenti.

Dalle Indicazioni per il curriculum 2007: costruire, interpretare e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.

7. Quali spunti didattici?

D4 Se n è un numero naturale qualsiasi, quale procedimento devi seguire per essere sicuro di ottenere sempre un numero dispari?

- ☐ A. $n-1$
- ☐ B. $n+1$
- ☐ C. $n \times 2 + 1$
- ☐ D. $\frac{n}{2} + 1$

OGGETTI DI VALUTAZIONE:

Classificazione di oggetti, figure, numeri in base a una determinata proprietà.
Rappresentazione di fatti e fenomeni attraverso tabelle, grafici ed espressioni algebriche

PROCESSI COGNITIVI:

Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*)

COMPITI:

Costruire, leggere e interpretare formule
Generalizzare relazioni in una sequenza numerica utilizzando parole e lettere

7. Quali spunti didattici?

Dal punto di vista dei contenuti disciplinari

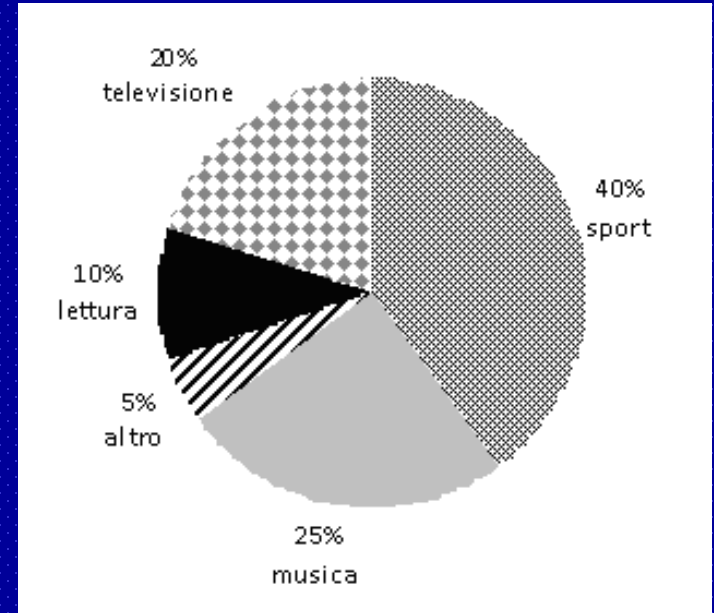
Analizzare e discutere certi contenuti presenti nei quesiti può servire per riflettere sui diversi modi di presentare questi concetti matematici.

ESEMPIO 1 2009 *Il tempo libero*

D20 Un'indagine sull'attività preferita nel tempo libero, compiuta su un campione di 220 studenti di una scuola con 700 studenti in totale, ha dato i risultati rappresentati nel grafico.

Qual è la probabilità che estraendo a caso uno studente del campione si ottenga un alunno che dedica il tempo libero alla lettura?

- A. $\frac{1}{220}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{70}$



Si tratta di individuare la probabilità di un evento a partire da dati statistici.

Tra i quesiti dell'ambito è quello con risultati peggiori: 65% di risposte corrette. Il 13,6% ha scelto l'opzione A, facendo unicamente riferimento alla definizione classica di probabilità; il 12,5% ha scelto l'opzione D, anche in questo caso hanno fatto riferimento unicamente alla definizione classica (10 su 700).

Cosa ci dice questo quesito?

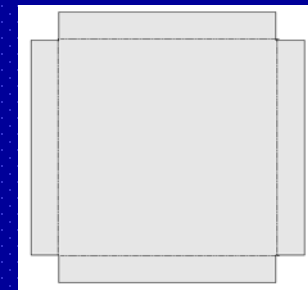
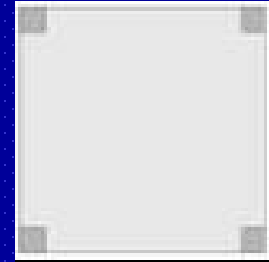
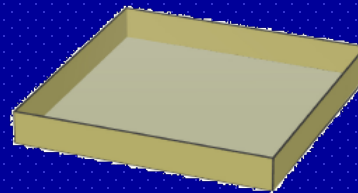
Un quesito sulla probabilità può anche essere associato alla lettura di un grafico (statistica) e non sempre e solo a situazioni riguardanti dadi o carte da gioco.

Che approccio alla probabilità proponiamo?

Nella **pratica didattica** molto spesso l'unico **approccio alla probabilità** è quello **classico** (rapporto fra casi favorevoli e casi possibili di eventi equiprobabili); raramente teniamo conto anche dell'approccio **frequentista** (individuazione della probabilità di un evento in base alla frequenza con il quale questo evento si presenta).

D3. In un foglio di cartoncino si ritaglia un quadrato di lato 10 cm. Da ogni angolo si ritaglia un quadratino di lato 1 cm (che nella prima figura vedi più scuro), per poter costruire una scatola ripiegando le strisce laterali. Qual è la capacità della scatola ottenuta ripiegando le strisce laterali?

- A. 64 cm^3
- B. 90 cm^2
- C. 96 cm^2
- D. 100 cm^3



Risponde correttamente il 61,9% degli studenti.

Tra le domande dell'ambito Spazio e figure a risposta chiusa, risulta essere la più difficile.

Il 16,5% (C) ha calcolato l'area dello sviluppo piano (probabilmente non ha collegato la capacità al volume). Mentre il 14,2% (D) sembra non essere stato in grado di passare dal piano allo spazio.

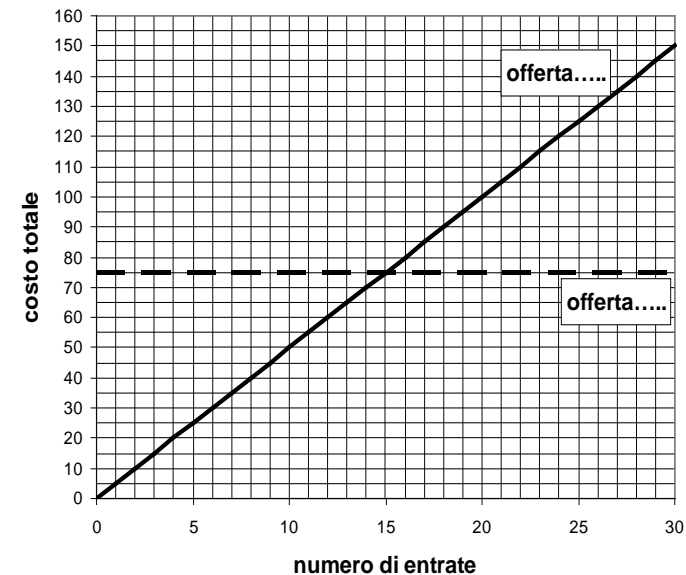
D6 La piscina **ACQUADOLCE** offre ai suoi frequentatori due diverse modalità di pagamento: è possibile fare un abbonamento mensile, che costa 75 euro (offerta A), oppure pagare un biglietto di 5 euro per ogni ingresso (offerta B).

a) Scrivi nelle caselle del grafico quale retta descrive l'offerta A e quale l'offerta B.

b) Con quanti ingressi in un mese le due offerte si equivalgono ? _____

c) Se in un mese si utilizza la piscina 20 volte, quanto si risparmia facendo l'abbonamento mensile? _____

Offerte piscina ACQUADOLCE



Per rispondere alla domanda a, si devono mettere in relazione rappresentazioni diverse di una stessa situazione: grafico e linguaggio naturale.

Per rispondere alla b lo studente deve individuare il punto di intersezione delle due rette come equivalenza delle due offerte.

Nella domanda c invece lo studente dovrebbe leggere e interpretare il grafico.

Risponde correttamente alla domanda a il 66,9% degli studenti, alla b il 78,2% e alla c il 74,7%.

Il risultato sembra anomalo in quanto la domanda c sembra la più complessa in termini di lettura del grafico. Probabilmente gli studenti, in virtù del fatto che i numeri in gioco erano semplici, hanno fatto il calcolo per rispondere alle domande b e c, indipendentemente da quanto avevano risposto in a, che è così risultata la domanda più complessa.

GRAZIE
GRAZIE